Колмогоровская сложность II.

1 мая 2017 г.

1. Покажите, что $KS(x, y, z) \leq KS(x) + KS(y) + KS(z) + O(\log n)$, если слова x, y, z имеют длину не больше n.

2. (а) Покажите, что если $x \to \hat{x}$ беспрефиксное кодирование, то

   $$\sum_{x \in BW} 2^{\ell(\hat{x})} \leq 1.$$

   (здесь BW — множество всех двоичных слова).

   (б) Покажите, что если беспрефиксное кодирование увеличивает длину слова не более чем на $f(n)$ (где n исходная длина), то есть $\ell(\hat{x}) \leq \ell(x) + f(\ell(x))$, то ряд $\sum_n 2^{-f(n)}$ сходится.

3. Покажите, что условная сложность “непрерывна по второ- му аргументу”: $KS(x|y0) = KS(x|y) + O(1); KS(x|y1) = KS(x|y) + O(1)$.

4. Докажите, что не найдётся такого c, что

   $$KS(x, y) \leq KS(x) + \log KS(x) + KS(y) + c$$

   при всех x и y.

5. Покажите, что при фиксированном у функция $x \to KS(x|y)$ отличается от KS не более чем на константу, зависящую от y (и не превосходящую $2KS(y) + O(1)$).

6. Докажите, что для любых слов y и z и для любого n найдётся слово x длины n, у которого $KS(x|y) > n - 1$ и $KS(x|z) > n - 1$.

7. Докажите “неравенство треугольника”: $KS(x|z) \leq KS(x|y) + 2 \log KS(x|y) + KS(y|z) + O(1)$ для любых трёх слов x, y, z.

8. Покажите, что изменение одного бита в слове длины n ме- няет его сложность не более чем на $\log n + O(\log \log n)$.