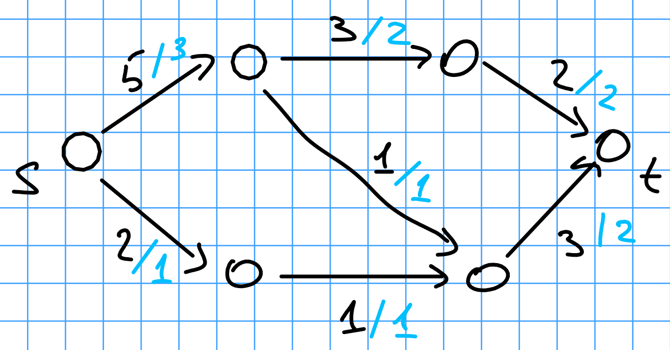
Задача о максимальном потоке



c_{uv} - пропускная способность

≡ Поток f:

1. $\forall (u,v) \in E \quad f(u,v) \geq 0$
2. $\forall (u,v) \in E \quad f(u,v) \leq c_{uv}$
3. $\forall v \in V \setminus \{s,t\}$

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,w)} f(v,w)$$

Величина потока: $|f| = \sum_{(s,u)\in E} f(s,u) = \sum_{(u,t)\in E} f(u,t)$

Задача: найти f : $|f|$ - max

Это задача ЛП:

$f_{uv} \geq 0$

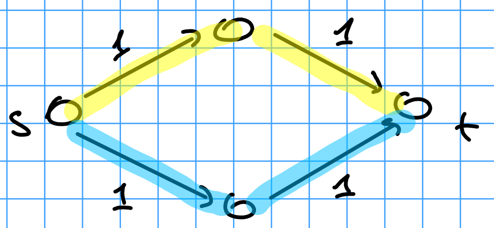
$f_{uv} \leq c_{uv}$

$\sum f_{uv} - \sum f_{vu} = 0$

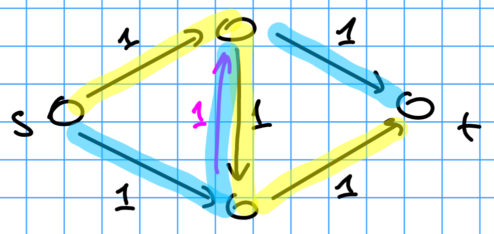
$\sum f_{su} \to \max$

Наивный алгоритм

Найдём какой-нибудь путь $s \rightsquigarrow t$
и пропустим по нему max возм. поток.



$|f| = 2$



$|f| = 1$

Остаточная сеть

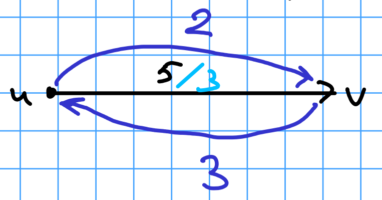
$G=(V,E)$ – исходный граф

G_f – остаточная сеть

$G_f = (V, \tilde{E})$

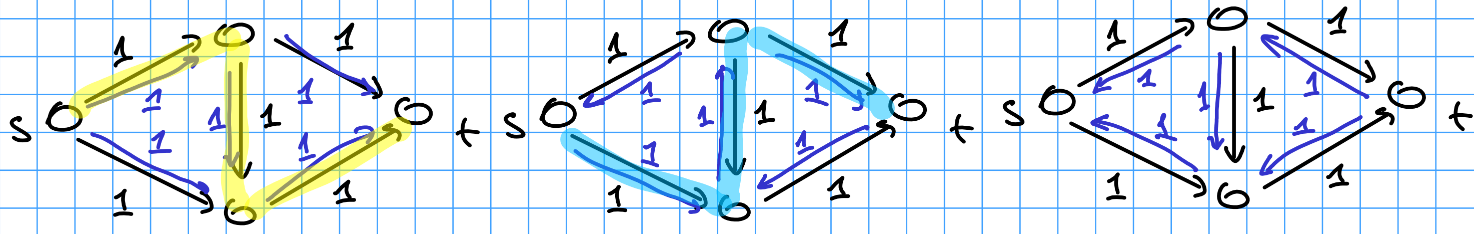
$\hat{E}$:

1. $\forall (u,v)\in E$, $(u,v)\in \hat{E}$, если $f(u,v) < c_{uv}$, $\tilde{c}_{uv} = c_{uv} - f(u,v)$
2. $\forall (u,v)\in E$, $(v,u)\in \tilde{E}$, если $f(u,v) > 0$, $\tilde{c}_{vu} = f(u,v)$



$c_{uv} = 5$

$f(u,v) = 3$



нет пути $s \rightsquigarrow t$

Схема алгоритма Форда-Фалкерсона

$\forall (u,v)\in E \quad f(u,v) = 0$

Пока в G_f есть путь $s \rightsquigarrow t$:

  находим путь $s \rightsquigarrow t$ (дополняющий путь)

  пускаем по нему max возм. поток

Утв. 1: Поток в остаточной сети $\longleftrightarrow$ потоку в исходном графе

▷ ∃ $\tilde{f}$ — поток в дополняющей сети

Рассм. $\bar{f}$: $\forall (u,v) \in E$: $\bar{f}(u,v) = \hat{f}(u,v) - \hat{f}(v,u)$

1. $\bar{f}(u,v) \geq 0$: $\hat{f}(u,v) = \tilde{c}_{vu} \geq \hat{f}(v,u)$
2. $\bar{f}(u,v) \leq c_{uv}$: $\hat{f}(u,v) \leq c_{uv}$
3. „Закон Кирхгофа": $\hat{f}$ их соблюдает $\Rightarrow \bar{f}$ тоже

◁

Утв: 2 Алгоритм остановится

(Пусть все $c_{uv} \in \mathbb{Z}$)

▷ $|f| \leq \sum c_{uv}$

на $\forall$ шаге поток увеличивается как минимум на 1 $\Rightarrow$ алгоритм остановится ◁

Утв: 3. Найденный поток — максимальный

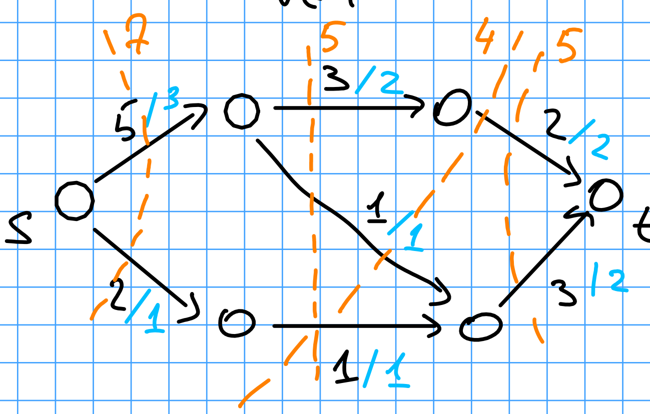
Теорема Форда-Фалкерсона

Размер макс. потока = размеру мин. s-t разреза

= s-t разрез графа $G = (V, E)$

C — это разбиение $V = S \sqcup T$, $s \in S$, $t \in T$

$$|C| = \sum_{\substack{(u,v)\in E \\ u \in S \\ v \in T}} c_{uv}$$ — величина разреза



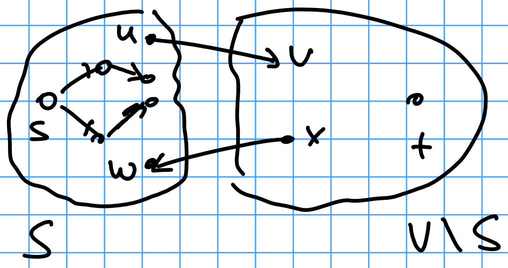
„Сертификат оптимальности"

NB: Мин. разрез — это двойственная задача ЛП

□ 1. $|f| \le |C|$, $\forall f, C$

2. $\max f$ = некоторому $C \Rightarrow C$ − min

∡ остаточную сеть G_f где f − max.
В G_f нет пути $s \rightsquigarrow t$
∡ S − все вершины достижимые из s
Утв: ∡ $C = (S, V \setminus S)$, $|C| = |f|$

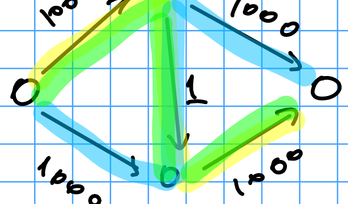


а) $u \in S$, $v \in T$
$(u, v) \in E$
? $f(u, v) = c_{uv}$
т.к. v недостижима в $G_f \Rightarrow G_f$ нет ребра $(u, v) \Rightarrow$
$f(u, v) = c_{uv}$

б) $w \in S$, $x \in T$
$(x, w) \in E$
? $f(x, w) = 0$
т.к. x недостижима из s в $G_f \Rightarrow$
ребро $(w, x) \notin \tilde{E} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x, w) = 0$

$\Rightarrow |f| = |C|$ ◁

Схема Ф-Ф может работать $O(\sum c_{uv})$



$\Rightarrow$ 2000 итераций

Алгоритм Эдмондса-Карпа (1972) и Диница (1970)

Схема алг. Ф-Ф, где дополняющие пути ищутся поиском в ширину (кратчайшие по # рёбер)

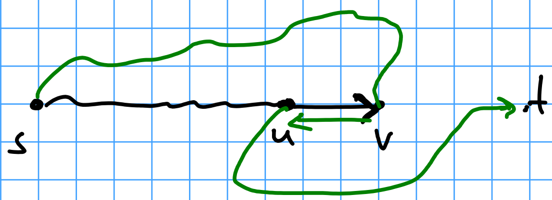
Утв: Алгоритм Э-К требует $O(VE)$ итераций поиска в ширину $\Rightarrow$ сложность алгоритма $O(VE \cdot E) = O(VE^2)$

$\rceil$ $D(v)$ – это расстояние от s до v в G_f

Лемма $D(v)$ не убывает в алг. Э-К.

$\triangleright$ $\rceil$ это не так. D – на i-ой итерации, D' – на $i+1$

$\measuredangle$ v – ближайшую к s вершину, для которой $D'(v) < D(v)$.



$D(v) \geq D'(v) + 1$

Утв: Ребро $(u,v) \notin G_f$ (на i-ой итерации)

$D'(u) \geq D(u)$

$\circlearrowleft$ $\underline{D(v)} \leq D(u) + 1 \leq D'(u) + 1 = \underline{D'(v)}$ против.

$\Rightarrow$ В G_f на i-ой итерации было ребро (v,u)

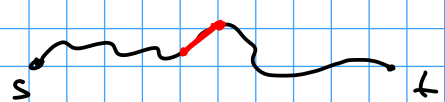
$\Rightarrow$ $D(u) = D(v) + 1$ (т.к путь кратчайший)

$\underline{D'(v)} = D'(u) + 1 \geq D(u) + 1 = \underline{D(v) + 2}$

противоречие.

$\triangleleft$

$\equiv$ Критическое ребро на i-ой итерации – это ребро, которое полностью насыщ. и исчезло из G_f.



На $\forall$ итерации есть хотя бы одно критическое ребро

$\triangleleft$ $(u, v) \in E$

$\exists$ t_1 и t_2 – послед. итерации, на которых (u, v) было критическим

$\exists$ t_3 : $t_1 < t_3 < t_2$

На итерации t_3 ребро (v, u) было критическим.

$$D_{t_1}(v) = D_{t_1}(u) + 1$$

$$D_{t_2}(v) = D_{t_2}(u) + 1$$

$$D_{t_3}(u) = D_{t_3}(v) + 1$$

$$\underline{D_{t_2}(v)} = D_{t_2}(u) + 1 \geq D_{t_3}(u) + 1 = D_{t_3}(v) + 2 \geq$$
$$\geq \underline{D_{t_1}(v) + 2}$$

Т.е. одна итерация $\uparrow$ $D(v)$ на 2

$\forall v$, $D(v) \leq |V|$

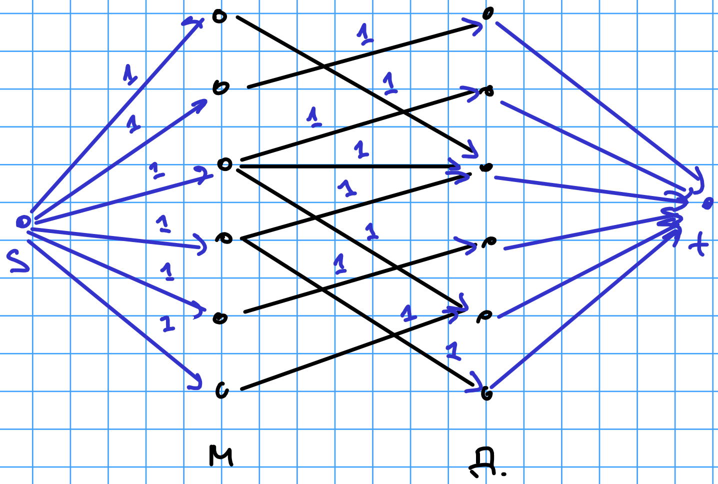
$\Rightarrow$ Каждое ребро не может быть критическим более $|V|/2$ раз

$\Rightarrow$ не более $|V|/2 \cdot |E|$ итераций

$\Rightarrow$ Э.-Д. работает за $O(VE^2)$. $\triangleright$

NB: Алгоритм Э.-К. работает с $\mathbb{R}$ пропускными способностями

Задача о макс. паросочетании



Макс. поток $\longleftrightarrow$ макс. парасоч.