Основные правила перечислительной комбинаторики. Биномиальные коэффициенты. Рекуррентные формулы.

1. Ребенок раскладывает в ряд карточки с пятью буквами А, двумя буквами Е, двумя буквами М, двумя буквами П, двумя буквами Т, одной буквой Г, одной буквой Л и одной буквой Р. Сколько у него имеется вариантов получить слово ТЕЛЕГРАММААППАРАТ?

2. Подсчитать количество разбиений числа k при ограничениях

$$a_i \geq s_i, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad\qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n =: s \leq k.$$

3. Подсчитать количество упорядоченных размещений k различимых предметов по n различимым ящикам.

4. Доказать комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n, 3)$:

$$S(n, 3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

5. Доказать, что числа Стирлинга $S(n, n-2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

6. Придумать комбинаторное доказательство формулы

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n, i).$$

   Дать комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга:

$$S(n, k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i, k-1)\, k^{i-1}, \qquad n \geq k.$$

7. Доказать, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.

8. Решить следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

9. Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

10. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Доказать, что

$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$

11. Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.

12. Найти рекуррентную формулу для вычисления чисел $F(n)$, введенных в предыдущем упражнении.

13. Доказать, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.