

## Листочек 14.09.2017

1. Имеются пять видов конвертов без марок и четыре вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
2. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих ровно одну цифру 7?
3. Доказать комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

4. Доказать, используя комбинаторные рассуждения, что для всех целых  $n \geq m \geq k \geq 0$  справедливо равенство

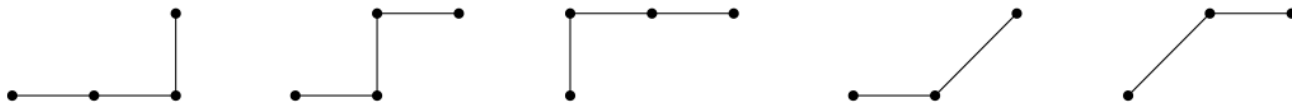
$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

5. Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и шестидесяти рядовых. Сколько существует различных способов сформировать отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и двадцати рядовых?
6. Рассмотрим решетку  $m \times n$  на плоскости  $\mathbb{Z}^2$ . Путем Деланной называется путь, соединяющий точку  $(0, 0)$  с точкой  $(m, n)$  и состоящий из вертикальных, горизонтальных и диагональных отрезков. Количество  $D_{m,n}$  таких путей называется числами Деланной. На рисунке показаны  $D_{2,1} = 5$  путей, отвечающих значениям параметров  $m = 2, n = 1$ . Доказать, что в общем случае количество  $D_{m,n}$  всех таких путей для заданных  $m$  и  $n$  рассчитывается по формуле

$$D_{m,n} = \sum_k \binom{m}{k} \cdot \binom{m+n-k}{m}.$$



7. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?
8. В алфавите племени Бум-Бум всего шесть букв. Любое слово состоит у них из шести символов, причем в каждом таком слове должны быть хотя бы две одинаковые буквы. Дайте оценку на количество слов в языке племени Бум-Бум.
9. Подсчитать количество упорядоченных размещений  $k$  различных предметов по  $n$  различным ящикам, то есть таких размещений, в которых важен порядок размещения предметов в каждом конкретном ящике.

10. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?
11. Предположим теперь, что в предыдущей задаче мы дополнительно требуем, чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент. Сколько существует способов это сделать?
12. Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?
13. На доску размерами  $9 \times 9$  поставили 15 одинаковых шашек. Сколько существует вариантов расстановки 15 одинаковых шашек на доске размерами  $9 \times 9$ ? А сколько из них не являются центрально-симметричными (центрально-симметричная конфигурация — такая, при которой для любой шашки, стоящей в клетке с координатами  $(i, j)$ , соответствует шашка, расположенная симметрично относительно центральной клетки доски)?
14. В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске?