ДЗ 7. Матрицы и теория графов

Для каждого графа G мы определили его матрицу смежности $A(G)$, матрицу инцидентности $B(G)$ (в том числе и когда задана ориентация), матрицу оператора Лапласа $L(G)$, матрицу случайного блуждания $P(G)$. Основным инструментом для нас была матрица смежности, конкретнее – её собственные значения. Однако часто нам помогала матрица инцидентности.

В самом начале мы получили следующий результат.

Факт. Размерность ядра матрицы инцидентности с одной стороны равна $m - n + c$, где m – количество рёбер, n – количество вершин, c – число компонент связности. С другой стороны – это размерность пространтсва циклов.

Следствие 1. Граф G содержит 2^{m-n+c} эйлеровых подграфов, то есть таких графов, что степень любой вершины чётна (графов, чья компонента связности имеет эйлеров цикл).

Факт. Матрица оператора Лапласа имеет вид $L = BB^\top$, где B – это матрица инцидентности. В частности, размерность её ядра равна размерности ядра $B^\top$ и равна количеству компонент связности.

Определение 1. Спектр графа – это спектр его матрицы смежности.

Примеры:
1) Спектр полного графа K_n равен $n - 1$, $-1, \dots, -1$.
2) Спектр цикла длины n равен $2\cos(\frac{2\pi l}{n})$.

Замечание. Спектр пути равен $2\cos\frac{\pi k}{n+1}$, надо показать, что характеристический многочлен – это многочлен Чебышёва.

Факт. Все элементы спектра графа по модулю меньше чем максимальная степень d_{max}. Если d_{max} – это собственное число графа, то тогда этот граф регулярный.

Факт. След степени матрицы смежности считает количество циклов (возможно с пересечениями). Например, $\frac{1}{6}\operatorname{Tr} A^3$ – это в точности число треугольников в графе. След всегда можно посчитать через спектр. Из этого следует, что граф двудольный тогда и только тогда, когда его спектр симметричен.

Попробуем понять, какую ещё информацию даёт спектр. Воспользовавшись следствием из теоремы Куранта-Фишера получаем:

Факт. Пусть G – граф на n вершинах. Пусть A – симметричная матрица $n \times n$, такая, что $A_{ij} = 0$, если вершины не соединены ребром. Пусть n_+ и n_- количество положительных и отрицательных собственных чисел A. Тогда размер независимого множества в G не превосходит $\min(n - n_+, n - n_-)$.

Определение 2. Сильно регулярный граф с параметрами k, λ и μ это k-регулярный граф, такой что любые две смежные вершины имеют λ соседей, а любые две несмежные – μ соседей.

Теорема 1. Матрица сильно k-регулярного графа удовлетворяет соотношению $A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)E = \mu J$, где J – это матрица из одних единиц.

Эта теорема позволяет легко посчитать спектры

Факт. Граф Петерсена сильно регулярный. Его спектр 3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.

Под конец мы показали:

Факт. Пусть D – это рёберный граф G. Тогда матрица смежности D имеет вид $B^\top B - 2I$, где B это матрица инцидентности(без знаков).

Рёберный граф связан с понятием гамильтоновости. А именно, если исходный граф G гамильтонов, то в его рёберном графе D есть индуцированный подграф вида C_n, где n – число вершин в G. Если мы сможем в каком-то случае вычислить спектр рёберного графа, то сможем показать, что граф G не гамильтонов.

Задачи

Задача 1. Пусть G – это k-регулярный граф. Найдите спектр дополнения G, если считать спектр G известным.

Задача 2. Найдите спектр графа $K_{n,n}$ и его дополнения.

Задача 3. Пусть G – k-регулярный граф. Покажите, что граф двудольный тогда и только тогда, когда его спектр содержит $-k$.

Задача 4. Для сильно k-регулярного графа найдите выражение для собственных чисел и их кратностей. Какие ограничения на n, k, μ, λ это даёт?