

Листочек 20.04.2018

1. Пусть $F(z) = 2e^z$ и $G(z) = 2e^z$ есть пара экспоненциальных функций, описывающих множества A и B . Предположим, что пересечение этих множеств описывается экспоненциальной функцией e^z . Чему равна экспоненциальная производящая функция, описывающая объединение этих двух множеств?

2. Дать комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}) \quad \forall n > 1; \quad D_0 = 1, \quad D_1 = 0.$$

3. Сосчитать количество чисел, состоящих из n цифр, таких, что все цифры нечетные, а цифры 1 и 3 присутствуют в числе не менее одного раза.
4. В футбольной команде n игроков. Тренер разбивает команду на две группы и просит каждую из групп выстроиться в линию. Затем он первой группе игроков раздает красные футболки. Во второй группе любой из игроков может выбрать футболку одного из трех цветов — оранжевую, белую или зеленую. Сколько существует различных способов совершить все эти действия?
5. Хорошо известно, что любое число можно единственным образом записать в двоичной системе счисления. Дать комбинаторное доказательство данного факта на языке производящих функций.
6. Поступающий в университет должен сдать четыре различных экзамена. Сколько есть вариантов успешно сдать экзамены и поступить, если проходной балл равен семнадцати? (*можно без численного ответа*)
7. Имеются четыре одинаковые колоды, каждая из которых содержит 52 карты. Мы выбираем из этих колод пять карт. Выборки совпадают, если у нас на руках оказывается пять карт одной масти и одного достоинства. Сколько существует различных выборок, состоящих из пяти карт? Получить ответ как с помощью производящих функций, так и с помощью прямых комбинаторных рассуждений.
8. Записать функциональное уравнение для производящей функции, описывающей количество путей Моцкина (аналогично уравнению на ОПФ чисел Каталана), и дать его комбинаторную интерпретацию с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций.
9. Рассмотрим окружность, на которой равномерно расставлено n точек. Часть из этих точек соединены между собой хордами так, чтобы ни одна пара хорд не пересекалась между собой. Выписать производящую функцию $f(z)$, описывающую количество способов провести непересекающиеся хорды между n точками на окружности.