

Определение 1. **EXP** — класс языков, разрешимых на ДМТ за время $2^{\text{poly}(n)}$. **NEXP** — класс языков, разрешимых на НМТ (для которых существует алгоритм проверки сертификата) за время $2^{\text{poly}(n)}$.

ML 8. Покажите, что если $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, то $\mathbf{EXP} = \mathbf{NEXP}$.

ML 9. Докажите, что существует язык, для которого любой алгоритм, работающий время $O(n^2)$ решает его правильно на менее, чем на половине входов какой-то длины, но этот язык распознается алгоритмом, работающим время $O(n^3)$.

ML 10. Докажите, что:

- $\mathbf{DSpace}[n^2] \subsetneq \mathbf{DSpace}[n^3]$;
- $\mathbf{NSpace}[n^2] \subsetneq \mathbf{NSpace}[n^3]$.

ML 11. Унарным называется язык, все слова которого состоят из одного символа. Докажите, что если все унарные языки из \mathbf{NP} лежат в \mathbf{P} , то $\mathbf{EXP} = \mathbf{NEXP}$.

ML 12. Докажите \mathbf{NP} полноту следующей задачи: на вход подается пара графов (G_1, G_2) , необходимо определить, изоморфен ли граф G_2 подграфу графа G_1 .

Определение 2. Пусть A — класс языков. Класс \mathbf{P}^A — класс языков, для которых существует полиномиальный детерминированный алгоритм, который может обращаться к оракулу из класса A .

ML 13. Покажите, что:

- $\mathbf{P}^{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$;
- язык GNI (пар неизоморфных графов) лежит в $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$.

ML 14. Покажите, что:

- $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \text{coNP}$;
- $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{EXP}$.

ML 15. Пусть существует \mathbf{NP} -полный унарный язык (все слова которого, состоят только из одного символа). Докажите, что $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ (подсказка: придумайте алгоритм для задачи SAT).

ML 4. Пусть функции $f, g : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ можно посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти (память считается только на рабочих лентах, входная лента доступна только для чтения, а по выходной ленте головка машины Тьюринга движется только слева направо). Докажите, что функцию $f(g(x))$ можно также посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти.

ML 6. Докажите \mathbf{NP} -полноту следующих задач:

- на вход подается пара графов (G_1, G_2) , необходимо определить, изоморфен ли граф G_2 подграфу графа G_1 (подсказка для одного из решений, вершины графа G_1 кодируют подстановку для группы переменных из булевой формулы);
- на вход подается граф G_1 и число $k \leq |G|$, необходимо определить, есть ли в графе G клика размера k ;
- на вход подается граф G_1 и число $k \leq |G|$, необходимо определить, существует такое ли $V \subseteq G$, что $|V| \leq k$ и все ребра графа G инцидентны хотя бы одной вершине из множества V .

ML 47. Пусть T — теория (множество замкнутых формул) следующего языка: $\{<, R, B\}$, где R (red) и B (blue) унарные предикаты. T содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:

- $\forall xy \exists zw (x < z < w < y \wedge R(z) \wedge B(w))$;
- $\forall x (R(x) \vee B(x))$;
- $\forall x (R(x) \leftrightarrow \neg B(x))$.

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.

ML 52. Будет ли теория $\text{Th}((\mathbb{N}, <, =))$ конечно аксиоматизируемой.

ML 53. Докажите, что:

- а) в интерпретации $(\mathbb{Q}, =, <, +, \text{рациональные константы})$ допустима элиминация кванторов;
- б) интерпретации $(\mathbb{Q}, =, <, +, \text{рациональные константы})$ и $(\mathbb{R}, =, <, +, \text{рациональные константы})$ элементарно эквивалентны;
- в) если единичный квадрат разрезан на несколько меньших квадратов, то все они имеют рациональные стороны (подсказка: используйте предыдущие пункты и покажите единственность решения системы уравнений).