# Биномиальные коэффициенты(ДЗ).

24 февраля 2017 г.

1. (1,5 балла) На доску размерами $9 \times 9$ поставили 15 одинаковых шашек. Сколько существует вариантов расстановки 15 одинаковых шашек на доске размерами $9 \times 9$? А сколько из них не являются центрально-симметричными (центрально-симметричная конфигурация — такая, при которой для любой шашки, стоящей в клетке с координатами $(i, j)$, соответствует шашка, расположенная симметрично относительно центральной клетке доски)?

2. (1,5 балла) Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины $n$, содержащих $k$ единиц? А бинарных строк длины $n$, содержащих $k$ единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

3. (1,5 балла) Рассмотрим решетку $m \times n$ на плоскости $Z^2$. Путем Деланноя называется путь, соединяющий точку $(0, 0)$ с точкой $(m, n)$ и состоящий из вертикальных, горизонтальных и диагональных отрезков. Количество $D_{m,n}$ таких путей называется числами Деланноя. Доказать, что в общем случае количество $D_{m,n}$ всех таких путей для заданных $m$ и $n$ рассчитывается по формуле
$$D_{m,n} = \sum_k \binom{m}{k} \cdot \binom{m+n-k}{m}.$$

4. (1 балл) Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?

5. (1,5 балла) Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

6. (2 балла) В классическом домино используются кости, разделенные на две части, каждая из которых содержит от нуля до шести точек.

Сколько костей существует в обобщенном домино, в котором любая из частей содержит от нуля до $n$ точек? Сколько существует пар таких костей? Сколькими способами из костей обобщенного домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

7. (2 балла) В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске?

8. (1,5 балла) Используя формулу суммирования по верхнему индексу, получить замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^{k} i, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^2, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^3.$$

9. (2 балла) Доказать обобщенное правило суммы для произвольного количества $n$ множеств:
$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| - \sum\limits_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum\limits_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$
$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$.

10. (2 балла) Докажите, что $(1+x)^n + (1-x)^n \le 2^n$ при $n \ge 1$ и$|x| \le 1$.