

Логика высказываний.

1. Формализуйте игру sudoku поставим в соответствие экземпляру задачи логическую формулу.
2. Приведите к КНФ формулы (i) $p \rightarrow (q \wedge r)$
(ii) $(p \vee q) \rightarrow r$
(iii) $\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow \neg s)$

3. Приведите к КНФ и ДНФ следующую формулу:

$$(x \wedge (y \vee z)) \vee (x \vee z)$$

4. Докажите, что система связок \neg, \rightarrow полна.
5. Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса \downarrow : результат $a \downarrow b$ совпадает с $\neg(a \vee b)$ или штрих Шеффера \uparrow : результат $a \uparrow b$ совпадает с $\neg(a \wedge b)$. Покажите, что других таких бинарных связок нет.
6. Две формулы, содержащие только переменные и связки \vee, \wedge и \neg эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду \vee заменить на \wedge и наоборот.
7. Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n .
8. (i) Докажите, что если пропозициональная формула использует только связки \wedge и \vee , то задаваемая ей булева функция монотонна.
(ii) Докажите, что монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки \wedge и \vee .
9. Пусть формула $\phi \rightarrow \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ , которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \rightarrow \tau$ и $\tau \rightarrow \psi$ являются тавтологиями.
10. Пусть F — произвольное поле. Назовём мультилинейной функцией полином от n переменных с коэффициентами из F , в котором все показатели степеней равны либо 0, либо 1. (Таким образом, каждый

моном в ней есть произведение коэффициента и некоторого набора переменных без повторений.) Будем рассматривать $B = 0, 1$ как подмножество F . Докажите, что всякая булева функция $B^n \rightarrow B$ однозначно продолжается до мультилинейной функции $F^n \rightarrow F$, и коэффициенты мультилинейной функции можно считать целыми числами.