Математическая логика и теория вычислимости
Лекция 2. Полные системы связок

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

22.02.2018

План лекции

1. Полнота системы связок $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$
2. Приведение формул к нормальным формам
3. Другие полные системы связок
4. Критерий Поста

План лекции

1. Полнота системы связок ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$)
2. Приведение формул к нормальным формам
3. Другие полные системы связок
4. Критерий Поста

Эквивалентность и нормальные формы

- *Отношение эквивалентности* — это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.
- В нашей истинностной интерпретации формул связка $\leftrightarrow$ является отношением эквивалентности.
- Как определить, принадлежат ли две формулы к одному классу эквивалентности?

Эквивалентность и нормальные формы

- *Отношение эквивалентности* — это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.
- В нашей истинностной интерпретации формул связка $\leftrightarrow$ является отношением эквивалентности.
- Как определить, принадлежат ли две формулы к одному классу эквивалентности?
- Удобный способ — определить для каждого класса *нормальную форму*, то есть выделить в каждом классе уникальный элемент и задать алгоритм приведения любого другого элемента к нему.

Уточнение понятия эквивалентности формул

- Формула, содержащая n пропозициональных переменных, определяет n-арную булеву функцию $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.
- Арность определяемой функции может быть и больше, скажем, формула $\neg p$ может определять как функцию одной переменной $f(p)$, так и функцию двух переменных $f(p, q)$:

p	$f(p)$
0	1
1	0

p	q	$f(p, q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

- Переменная, подобная q, носит название *фиктивной*; подобная p — *существенной*.
- Эквивалентность формул мы определяем с точностью до фиктивных переменных.

- *Литерал* — пропозициональная переменная или ее отрицание.
- *Конъюнкт* — конъюнкция литералов. Например, $p \wedge \neg q \wedge \neg r$.
- Формула называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*, если она представляет собой дизъюнкцию конъюнктов: $p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge s \vee p$.
- *Дизъюнкт* — дизъюнкция литералов. Например, $\neg p \vee q \vee r$.
- Формула называется *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*, если она представляет собой конъюнкцию дизъюнктов: $(\neg p \vee q \vee s) \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)$.

Совершенные КНФ и ДНФ

- ДНФ называют *совершенной (СДНФ)*, если любая пропозициональная переменная входит в каждый конъюнкт ровно один раз: $\neg p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg q \vee p \wedge q$.
- КНФ называют *совершенной (СКНФ)*, если любая пропозициональная переменная входит в каждый дизъюнкт ровно один раз: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$.
- Как записать тавтологию и противоречие в СДНФ и СКНФ?

Полнота системы связок ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$)

Теорема о полноте. Любая булева функция n переменных может быть записана в виде пропозициональной формулы.
Доказательство.

- Пусть формула выполнима. Для каждой строки со значением 1 в таблице истинности, задающей функцию, строим конъюнкт из всех переменных, имеющих значение 1, и отрицаний переменных, имеющих значение 0. Искомая формула представляет собой дизъюнкцию таких конъюнкций.
- Пусть формула необщезначима[1]. Для каждой строки со значением 0 в таблице истинности, строим дизъюнкт из всех переменных, имеющих значение 0, и отрицаний переменных, имеющих значение 1. Искомая формула представляет собой конъюнкцию таких дизъюнкций. ■

[1] Для доказательства достаточно покрыть случай противоречия.

План лекции

1. Полнота системы связок $(\neg, \wedge, \vee, \to)$
2. Приведение формул к нормальным формам
3. Другие полные системы связок
4. Критерий Поста

Алгоритм построения ДНФ

- Избавляемся от импликаций, используя эквивалентность

$$A \to B \leftrightarrow \neg A \vee B.$$

- Избавляемся от отрицаний составных подформул, используя законы Де Моргана

$$\begin{array}{rcl} \neg(A \wedge B) & \leftrightarrow & \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) & \leftrightarrow & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

- Избавляемся от двойного отрицания.
- Используем дистрибутивность и поглощение

$$\begin{array}{rcl} A \wedge (B \vee C) & \leftrightarrow & A \wedge B \vee A \wedge C \\ A \wedge (A \vee B) & \leftrightarrow & A \\ A \vee A \wedge B & \leftrightarrow & A \end{array}$$

Алгоритм построения СДНФ по ДНФ

- Если в конъюнкте не хватает переменной (скажем q), добавляем в него $q \vee \neg q$.

$$p \vee p \wedge \neg q \;\leftrightarrow\; p \wedge (q \vee \neg q) \vee p \wedge \neg q$$

- Используем дистрибутивность

$$A \wedge (B \vee C) \;\leftrightarrow\; A \wedge B \vee A \wedge C$$

$$p \wedge (q \vee \neg q) \vee p \wedge \neg q \;\leftrightarrow\; p \wedge q \vee p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg q$$

- Убираем повторяющиеся конъюнкты, используя идемпотентность $\vee$

$$A \vee A \;\leftrightarrow\; A$$

$$p \wedge q \vee p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg q \;\leftrightarrow\; p \wedge q \vee p \wedge \neg q$$

Алгоритм построения КНФ

- Избавляемся от импликаций, используя эквивалентность
$$A \to B \leftrightarrow \neg A \vee B.$$
- Избавляемся от отрицаний составных подформул, используя законы Де Моргана
$$\begin{array}{rcl} \neg(A \wedge B) & \leftrightarrow & \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) & \leftrightarrow & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$
- Избавляемся от двойного отрицания.
- Используем дистрибутивность и поглощение
$$\begin{array}{rcl} A \vee B \wedge C & \leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ A \wedge (A \vee B) & \leftrightarrow & A \\ A \vee A \wedge B & \leftrightarrow & A \end{array}$$

Алгоритм построения СКНФ по КНФ

- Если в дизъюнкте не хватает переменной (скажем q), добавляем в него $q \wedge \neg q$.

$$p \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \vee q \wedge \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$$

- Используем дистрибутивность

$$A \vee B \wedge C \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$(p \vee q \wedge \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$$

- Убираем повторяющиеся дизъюнкты, используя идемпотентность $\wedge$

$$A \wedge A \leftrightarrow A$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

План лекции

1. Полнота системы связок $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$
2. Приведение формул к нормальным формам
3. Другие полные системы связок
4. Критерий Поста

Примеры полных систем

- Система связок $(\neg, \wedge, \vee)$ полна. Действительно, от импликации можно избавиться, используя эквивалентность

$$A \to B \ \leftrightarrow \ \neg A \vee B$$

- Система связок $(\neg, \wedge)$ полна. От дизъюнкции можно избавиться, используя следствие закона Де Моргана

$$A \vee B \ \leftrightarrow \ \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

- Система связок $(\neg, \vee)$ полна. От конъюнкции можно избавиться, используя следствие закона Де Моргана

$$A \wedge B \ \leftrightarrow \ \neg(\neg A \vee \neg B)$$

- Полна ли система связок $(\neg, \to)$?

Полные системы из одной связки

- Введем следующие бинарные связки: $\uparrow$ (штрих Шеффера) и $\downarrow$ (стрелка Пирса):

$$
\begin{array}{rcl}
p \uparrow q & \leftrightarrow & \neg(p \wedge q) \\
p \downarrow q & \leftrightarrow & \neg(p \vee q)
\end{array}
$$

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

- Система из одной связки $(\uparrow)$ полна. Действительно,

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A & \leftrightarrow & A \uparrow A \\
A \wedge B & \leftrightarrow & (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)
\end{array}
$$

- Система из одной связки $(\downarrow)$ полна. Действительно,

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A & \leftrightarrow & A \downarrow A \\
A \wedge B & \leftrightarrow & (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)
\end{array}
$$

Сложение по модулю 2

- Введем бинарную связку: $\oplus$ (сложение по модулю 2, XOR):

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Система связок $(\oplus, \wedge, 1)$ полна. Действительно,

$$\begin{array}{rcl} \neg A & \leftrightarrow & A \oplus 1 \\ A \vee B & \leftrightarrow & A \oplus B \oplus A \wedge B \end{array}$$

- Мы предполагаем приоритет $\oplus$ ниже $\wedge$, ассоциативность не играет особой роли, посольку связка ассоциативна.
- Связка $\oplus$ коммутативна и $\wedge$ дистрибутивна относительно нее.

Полиномы Жегалкина

- *Моном* — это либо константа 1, либо коньюнкция набора переменных.
- *Полином Жегалкина* — сумма мономов по модулю 2.
- Поскольку $A \oplus A \ \leftrightarrow \ 0$, то повторяющиеся четное число раз мономы в полиноме сокращают друг друга.
- **Теорема.** Всякая булева функция может быть представлена полиномом Жегалкина.
  Доказательство. Индукция. Пусть умеем представлять полиномом булеву функцию n переменных. Тогда

$$\begin{aligned} f(p_1, \ldots, p_{n+1}) \quad &= \quad f(p_1, \ldots, p_n, 0) \oplus \\ &\quad\ \big(f(p_1, \ldots, p_n, 0) \oplus f(p_1, \ldots, p_n, 1)\big) \wedge p_{n+1} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Теорема. Всякая булева функция *однозначно* может быть представлена полиномом Жегалкина.
Доказательство. Пусть $f(p_1, \ldots, p_n)$ представима разными полиномами M и N. Они равны при любых оценках, то есть $M \oplus N \leftrightarrow 0$.
Докажем по индукции, что тогда $A \equiv M \oplus N$ не содержит мономов (то есть M и N равны как полиномы)

$$A(p_1, \ldots, p_n) = B(p_2, \ldots, p_n) \oplus p_1 \wedge C(p_2, \ldots, p_n)$$

Полагая $p_1 = 0$ и $p_1 = 1$ видим, что $B \leftrightarrow 0$ и $C \leftrightarrow 0$, (по IH) они не содержат мономов, то есть A не содержит мономов. ■

План лекции

1. Полнота системы связок $(\neg, \wedge, \vee, \to)$
2. Приведение формул к нормальным формам
3. Другие полные системы связок
4. Критерий Поста

Примеры неполных систем

- Система связок ($\wedge$, $\vee$) не полна. Она позволяет выразить только монотонные функции (монотонно неубывающие по каждому своему аргументу).
- Функция называется сохраняющей единицу, если

$$f(1, 1, \ldots, 1) = 1$$

- Система связок ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) не полна. Она "сохраняет единицу".
- Имеется ли универсальный способ определения полноты/неполноты системы связок?

Предполные классы булевых функций

- Выделяют 5 предполных классов:
  - функции сохраняющие ноль, T_0 ;
  - функции сохраняющие единицу, T_1;
  - монотонные функции, M;
  - линейные функции, L;
  - самодвойственные функции, S.
- Функция называется *самодвойственной*, если

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = \neg f(\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n)$$

- Функция называется *линейной*, если все мономы в представляющем ее полиноме Жегалкина содержат не более одной переменной

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \wedge p_1 \oplus \alpha_2 \wedge p_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n \wedge p_n$$

- **Теорема.** Если набор функций содержится в некотором предполном классе, то любая композиция этих функций тоже содержится в этом классе.
- **Теорема (критерий Поста).** Набор булевых функций является полным тогда и только тогда, когда он не принадлежит целиком к одному из предполных классов T_0, T_1, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$.
- **Доказательство.**
  - **Необходимость.** Следует из предыдущей теоремы.
  - **Достаточность.** Сконструируем связки, образующие полный набор, из функций, не лежащих в классах T_0, T_1, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$.

Конструируем $\neg$ или константы

- Пусть $f \notin T_0$. Подставим вместо всех переменных одну (p), получим

$$\begin{aligned} f(0,0,\ldots,0) &= 1 \\ f(p,p,\ldots,p) &= ? \end{aligned}$$

Результат: имеем либо константную функцию 1, либо $\neg$.

- Пусть $f \notin T_1$. Подставим вместо всех переменных одну (p), получим

$$\begin{aligned} f(p,p,\ldots,p) &= ? \\ f(1,1,\ldots,1) &= 0 \end{aligned}$$

Результат: имеем либо константную функцию 0, либо $\neg$.

Конструируем $\neg$ и константы

- Если $\neg$ все еще нет, то есть обе константы.
- Пусть $f \notin M$. Найдем переменную, на которой она убывает, подставим подходящие константы вместо остальных, получим $\neg$.
- Может еще не хватать констант.
- Пусть $f \notin S$. Тогда на некотором наборе значений

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \dots, \neg\alpha_n)$$

Вместо 0 подставляем p, вместо 1 подставляем $\neg p$. Результат: имеем какую-то константную функцию, другая получается отрицанием.

Конструируем $\wedge$ или $\vee$

- Пусть $f \notin L$. Значит в полиноме Жегалкина есть моном, содержащий конъюнкцию по крайней мере двух переменных. Пусть это p и q, группируем

$$A \oplus B \wedge p \oplus C \wedge q \oplus D \wedge p \wedge q$$

  Коэффициенты A, B, C, D зависят от остальных переменных.
- D заведомо не 0, то есть можно выбрать такую оценку, чтобы он обратился в 1.
- Имеем один из вариантов

$$\alpha \oplus p \wedge q$$
$$\alpha \oplus p \oplus p \wedge q$$
$$\alpha \oplus q \oplus p \wedge q$$
$$\alpha \oplus p \oplus q \oplus p \wedge q$$

- α полностью в нашей власти, поскольку уже есть $\neg$.

- $p \wedge q$ — получаем конъюнкцию.
- $p \oplus p \wedge q \leftrightarrow p \wedge (1 \oplus q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$, отрицание уже есть, получаем конъюнкцию.
- $q \oplus p \wedge q \leftrightarrow q \wedge (1 \oplus p) \leftrightarrow \neg p \wedge q$, отрицание уже есть, получаем конъюнкцию.
- $p \oplus q \oplus p \wedge q \leftrightarrow 1 \oplus (1 \oplus p) \wedge (1 \oplus q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow p \vee q$ — получаем дизъюнкцию.

$\blacksquare$