1 Домашнее задание

1.1 (1 балл). Решить следующие рекуррентные соотношения и аналогичные им обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6;\\
&a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6;\\
&a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, && a_0 = 1, \quad a_1 = 2.
\end{aligned}
$$

1.2 (1,5 балла). Построить общее решение рекуррентного соотношения вида

$$a_{n+5} = 2a_{n+4} + 16a_{n+1} - 32a_n.$$

Записать общее решение аналогичного линейного обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка.

1.3 (1 балл). Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

1.4 (1,5 балла). Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 4\,a_n + 3 \cdot 2^n.$$

Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

1.5 (2 балла). Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n.$$

Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

1.6 (2 балла). Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 3\,a_{n+1} - 2\,a_n + 3 \cdot \sin(n\pi/2).$$

Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

1.7 (2,5 балла). Построить общее решение следующего неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$y''' - 6y'' + 9y' = x\,e^{3x} + e^{3x}\,\cos(2x).$$

Какому рекуррентному соотношению отвечает это уравнение? Записать решение такого рекуррентного соотношения.

1.8 (1,5 балла). В теннисном турнире участвуют $2n$ игроков. Составить и решить рекуррентное соотношение для количества a_n различных пар, которые можно сформировать для n матчей первого круга.

1.9 (1,5 балла). На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

1.10 (1,5 балла). Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.

1.11 (2 балла). Космический зонд обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, состоящее из пяти символов (a, b, c, d, e). Четыре пары символов — *ce*, *cd*, *ed*, *ee* — никогда не встречаются в марсианских ДНК, однако любая цепочка, не содержащая этих пар, возможна. Порядок букв в цепочке важен, поэтому, например, цепочка *bbdca* возможна, а *bbcda* — нет. Найти рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти цепочки слов. Построить решения этих рекуррентных соотношений.

1.12 (1,5 балла). Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

$$F_{n+m} = F_{n-1}\, F_m + F_n\, F_{m+1}; \tag{1}$$

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}; \tag{2}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n\, F_{n+1}. \tag{3}$$

1.13 (1 балл). Используя соотношение (1), доказать, что наибольший общий делитель чисел Фибоначчи F_n и F_m есть число Фибоначчи F_d, где d есть наибольший общий делитель чисел n и m:

$$\gcd(F_n, F_m) = F_d, \qquad d = \gcd(n, m).$$

1.14 (1,5 балла). Доказать, что возможна, вообще говоря, фибоначчиева система исчисления, показав, что любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \ldots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты a_i равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел $\{a_i\}$ не равны одновременно единице.