Линейное пространство ребер. Циклы и разрезы

Практика

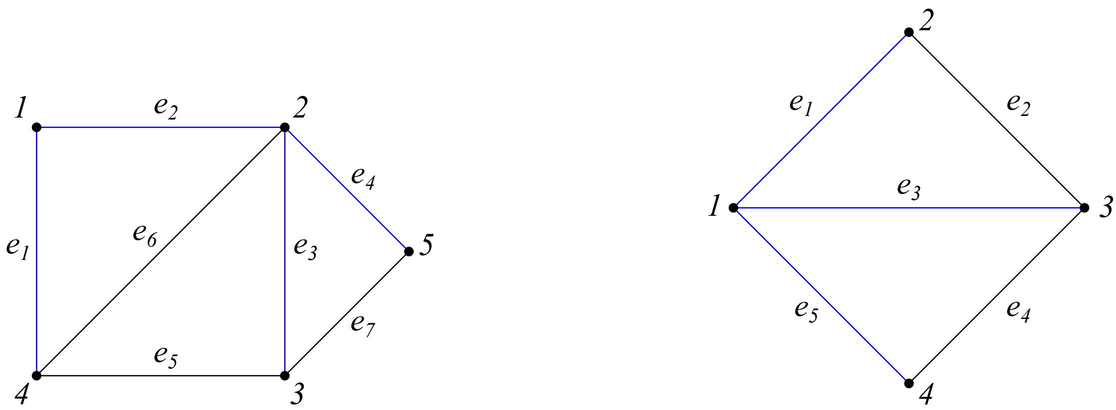
29 сентября 2017 г.

1. (1 балл). Пусть T есть произвольное остовное дерево связного графа G. Доказать, что никакое подмножество ребер кодерева $\bar{T}$ не образует минимального реберного разреза в G.

2. (1.5 балла). Пусть каждый из двух остовных подграфов S_1 и S_2 пересекаются с каким-то третьим остовным подграфом S_3 по четному числу ребер. Доказать, что тогда и $S_1 \triangle S_2$ пересекается с S_3 по четному числу ребер.

3. (1.5 балла). Пусть e есть какое-то ребро произвольного остовного дерева $T(G)$ связного графа G. Доказать, что в подмножестве ребер кодерева $\bar{T}$, к которому добавлено ребро e, обязательно найдется единственный минимальный разрез графа G.

4. (1.5 балла). Доказать, что любой реберный разрез $[S, \bar{S}]$ можно представить в виде объединения нескольких попарно непересекающихся между собой минимальных реберных разрезов.

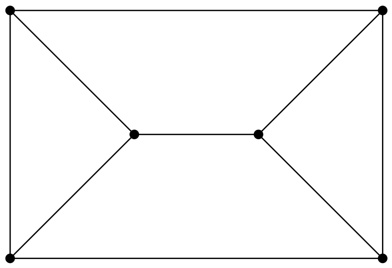


(a) (b)

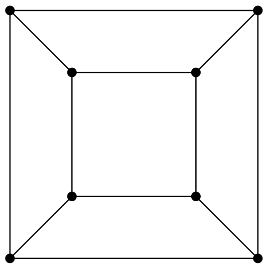
Рис. 1

5. (1.5 балла). Для графа G, показанного на рис.1,a, построить набор фундаментальных циклов, а также набор фундаментальных разрезов, связанных с остовным деревом, ребра которого помечены синим цветом на рисунке. Показать, что пересечение пространств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$ в таком графе состоит из единственного пустого набора ребер, а следовательно, набор фундаментальных циклов и фундаментальных разрезов образует базис в пространстве $\mathcal{E}$. Разложить вектор $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ по этому базису.

6. (1.5 балла). Доказать, что для любого подмножества S множества $V(G)$ вершин графа G справедливо равенство
$$|\partial(S)| = \sum_{x \in S} \deg(x) - 2|E(G[S])|.$$



(a) Граф G



(b) Граф Q_3

Рис. 2

7. (0.5 балла). Определить, возможно ли построить P_4-декомпозицию показанного на рис.2,a графа G.

8. (1 балл). Определить, возможно ли построить P_4-декомпозицию показанного на рис.2,b графа Q_3. Возможно ли построить для этого графа $K_{1,3}$-декомпозицию?

9. (1.5 балла). Для графа G, показанного на рис.1,b, построить набор фундаментальных циклов, а также набор фундаментальных разрезов, связанных с остовным деревом, ребра которого помечены синим цветом на рисунке. Перечислить все векторы, принадлежащие подпространствам $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$, а также $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$.

10. (1.5 балла). Пусть r есть либо размерность $n-1$ подпространства $\mathcal{B}$, либо размерность $m-$ $-n+1$ подпространства $\mathcal{C}$. Доказать, что в каждом случае количество различных базисов, которые можно получить для заданного подпространства, рассчитывается по формуле
$$\frac{1}{r!}(2^r - 2^0) \cdot (2^r - 2^1) \cdot \ldots \cdot (2^r - 2^{r-1}).$$