ML 25. Является ли перечислимым множество всех программ, вычисляющих сюръективные функции. А его дополнение?

ML 26. Используя теорему Клини докажите, что:

а) существует алгоритм, который всюду останавливается и выдает 1 на числе, которое является квадратом его номера, а на всех остальных входах выдает ноль;

б) существуют два различных алгоритма $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что алгоритм $\mathcal{A}$ печатает $\sharp\mathcal{B}$, а алгоритм $\mathcal{B}$ печатает $\sharp\mathcal{A}$.

Определение 1. Двухместная функция $U(n, x)$ называется универсальной для класса функций $\mathfrak{F}$, если $U \in \mathfrak{F}$ и для любой одноместной функции $f \in \mathfrak{F}$ найдется такое n, что $f(x) = U(n, x)$.
Пусть U — универсальная функция для класса вычислимых функций. Будем говорить, что U задает нумерацию функций в следующем смысле: $f_n(x) = U(n, x)$. Нумерация, заданная функцией $U(n, x)$ называется главной, если для любой вычислимой функции $V(n, x)$ существует такая вычислимая, всюду определенная функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $V(n, x) = U(s(n), x)$.

ML 27. Покажите, что функция $U(n, x) = {<}n{>}(x)$ задает главную нумерацию.

ML 28. Докажите, что для любой вычислимой функции f в любой главной нумерации (главной универсальной функции) $V(n, x)$ существует бесконечное число номеров n, что для любого x выполнено, что $V(n, x) = f(x)$ (при чем $V(n, x)$ не определенно тогда и только тогда, когда $f(x)$ не определена).

ML 29. Покажите, что существуют универсальная вычислимая функция, которая не является главной.

ML 30. Пусть $H = \{(n, x) \mid {<}n{>}(x) \text{ останавливается}\}$. Покажите, что $H \in \Sigma_1$ и любое множество из Σ_1 m-сводится к H.

ML 31. Покажите, что множество номеров алгоритмов, которые не останавливаются ни на одном входе

а) лежит в классе Π_1;

б) любое другое множество из Π_1 m-сводится к этому множеству;

в) покажите, что это множество не лежит в Σ_1.

ML 12. Приведите пример числа такого числа $r \in \mathbb{R}$, что множество $\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq r\}$ не является перечислимым.

ML 22. Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right], \ldots, \left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.