DL 86. Покажите, что если $H[X] \le t$, то найдется такое значение b, что $\Pr[X = b] \ge 2^{-t}$.

DL 87. Рассмотрим функцию $h(p) = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$, функция определена на $[0,1]$, $h(0) = h(1) = 0$. Покажите, что:

а) $h(p)$ строго возрастает на $[0, \frac{1}{2}]$ и убывает на $[\frac{1}{2}, 1]$;

б) h выпукла вверх.

DL 88. Покажите, что $H[X,Y] \ge H[X]$.

DL 89. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Пусть $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ — это глубины всех листьев дерева. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \le 1$;

б) если $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \le 1$, то найдется дерево из n листьев с глубинами $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

DL 90. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Покажите, что:

а) глубина хотя бы одного листа не меньше $\log n$;

б) средняя глубина листа не меньше $\log n$. (Более строгая формулировка: рассмотрим случайную величину, которая выбирает случайный лист и выдает ее глубину, докажите, что математическое ожидание этой случайной величины не меньше $\log n$).

DL 91. Пусть $\mathcal{F}$ — это семейство подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$, а p_i — это доля элементов $\mathcal{F}$, которые содержат элемент i. Докажите, что $|\mathcal{F}| \le 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} H(p_i)}$.

DL 92. Пусть $X : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Покажите, что $H[f(X)] \le H[X]$. Когда достигается равенство?

DL 93. Укажите явную биекцию между множеством бесконечных последовательностей чисел из множества $\{0, 1, 2\}$ и множеством бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

DL 94. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, $I \subseteq [n]$ — произвольное множество. Докажите, что:

а) для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ события $[X_i \in A_i]$ являются независимыми;

б) для любых функций $f_1, f_2, \ldots f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f(X_i)$ являются независимыми;

в) случайные величины $\{X_i\}_{i \in I}$ являются независимыми;

г) для любых функций $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{[n] \setminus I} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f((X_i)_{i \in I})$ и $g((X_i)_{i \in [n] \setminus I})$ независимы.

DL 74. В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины выходит по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

DL 75. Пусть функция `CONN` принимается на вход ребра графа и возвращает 1 тогда и только тогда, когда данный граф связен.

а) Докажите, что глубина дерева решений функции `CONN` равна $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число вершин входного графа.

б) Оцените размер дерева решений функции `CONN`.

DL 81. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DL 85. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.