22 февраля. Условная вероятность (и не только)

1. Докажите, что каждый n-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с числом ребер, меньшим 2^{n-1}, можно раскрасить в два цвета (существует раскраска множества V в два цвета такая, что никакое ребро не является монохроматическим).

2. В урне 7 белых и 3 черных шара. Без возвращения одновременно извлекаются 3 шара. Известно, что среди них есть хотя бы один черный шар. Чему равна вероятность того, что другие два шара белые?

Домашняя работа

1. Пусть $n \geqslant 4$, и H является n-однородным гиперграфом с не более чем $\frac{4^{n-1}}{3^n}$ ребрами. Доказать, что существует раскраска вершин графа H в четыре цвета такая, что в каждом ребре представлены все эти четыре цвета.

2. Пусть $A, B, C_1, \ldots, C_n$ — события из некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Предположим, что для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $\mathsf{P}(C_i) > 0$, $\mathsf{P}(A|C_i) \geqslant \mathsf{P}(B|C_i)$, причем $\cup_{i=1}^n C_i = \Omega$. Верно ли, что $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(B)$?

3. При передаче сигналов «точка» и «тире» по телеграфу в среднем искажается $2/5$ сигналов «точка» и $1/3$ сигналов «тире». Среднее соотношение сигналов «точка» и «тире» в сообщении $5/3$. Найти вероятность того, что принятый сигнал «точка» не был искажён (известно, что приняли точку; чему равна вероятность, что это действительно точка?). Ответить на тот же вопрос для сигнала «тире».

4. Привести пример четырех зависимых событий A_1, A_2, A_3, A_4 таких, что любые три из них взаимно независимы.

5. Каждый человек имеет кровь, относящуюся к одной из четырёх групп I, II, III, IV. Переливание крови возможно к человеку из той же группы, что и донор, а также от группы I к любой другой, от II и III группы к группе IV. Пропорциональный состав населения следующий: I-я группа 0.337, II-я группа 0.375, III-я группа 0.209, IV-я группа 0.079.

   а) Найти вероятность того, что переливание крови возможно случайному пациенту от случайного независимого донора.

   б) Сколько нужно независимых доноров, чтобы вероятность возможности выбора подходящего донора составила не менее 0.9?

6. *(Бонус)* **Задача о разборчивой невесте.** Невеста последовательно встречается с N женихами и ищет среди них «самого лучшего». Множество женихов считаем полностью упорядоченным, а любой порядок встреч одинаково вероятен. Очередного жениха можно сравнить с предыдущими, а затем выбрать (тогда выбор заканчивается) или отвергнуть. Найти вероятность успешного выбора при оптимальной для невесты стратегии. Невеста выбрала такую стратегию: для некоторого $a \in (0, 1)$ пропустить первых aN женихов, а затем выбрать первого, который окажется лучше всех предыдущих (если такой будет). Считая N большим числом, найти вероятность успешного выбора. При каком a эта стратегия будет оптимальной, и чему равна максимальная вероятность?