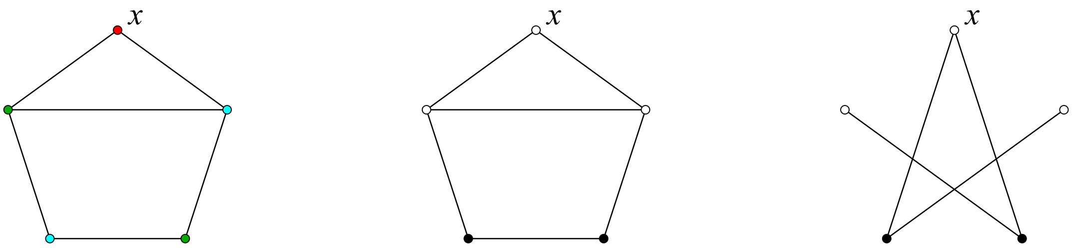
Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы

Практика

8 декабря 2017 г.



(a) Граф G (b) Граф G (c) Граф $\bar{G}$

Рис. 1

1. (1 балл). Пусть $G_2 = K_2$, а графы G_k, $k > 2$, получаются из графов G_{k-1} с помощью описанной в теореме **??** процедуры. Подсчитать количество вершин в графе G_k.

2. (1 балл). Доказать, что среди всех k-дольных графов, построенных на
$$n = t \cdot k + r, \qquad 0 \leqslant r \leqslant k - 1$$
вершинах, максимальное количество ребер имеет полный k-дольный граф G, в котором r блоков имеют $t + 1$ вершин, а в $k - r$ блоках содержатся t вершин.

3. (1.5 балла). Доказать, что простой граф G представляет собой полный k-дольный граф тогда и только тода, когда не существует никакого индуцированного подграфа графа G, состоящего из трех вершин и одного ребра.

4. (2.5 балла). Доказать, что простой связный граф, построенный на n вершинах и m ребрах, имеет по меньшей мере
$$(4m - n^2)\frac{m}{3n}$$
треугольников.

5. (0.5 балла). Доказать, что граф G, показанный на рис.1,a, является совершенным графом.

6. (1 балл). Доказать, что для всех $k \geqslant 2$ справедливы неравенства
$$\chi(C_{2k+1}) > \omega(C_{2k+1}) \qquad \text{и} \qquad \chi(\bar{C}_{2k+1}) > \omega(\bar{C}_{2k+1}).$$
Из этих неравенств, в частности, следует, что как циклы нечетной длины, отличные от $K_3 = C_3$, так и их дополнения, совершенными графами не являются.

7. (2.5 балла). Доказать, что обхват графа G, построенного на n вершинах и имеющего как минимум $\frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ ребер, не превосходит четырех.

8. (0.5 балла). Является ли граф C_{2n}, $n \geqslant 2$, совершенным?

9. (1 балл). Доказать, что любой граф G, построенный на n вершинах и не содержащий клики размера $k+1$, имеет как максимум $(1-1/k)n^2/2$ ребер.

10. (2 балла). Предъявить нижнюю оценку на количество вершин в k-регулярном графе G, имеющего обхват, больший или равный g. Рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного значения g.

11. (2 балла). Доказать, что в случае выполнения неравенства

$$\sum_{x \in V(G)} \binom{\deg(x)}{2} > (l-1)\binom{n}{2}$$

построенный на n вершинах граф G содержит $K_{2,l}$ в качестве своего подграфа.

12. (1 балл). Предположим, что верно следующее утверждение: граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого индуцированного подграфа H графа G выполняется неравенство

$$|V(H)| \leqslant \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Доказать, что из этого утверждения следует теорема о совершенном графе.

13. (1 балл). Доказать, что любой двудольный граф $G[X,Y]$ является совершенным графом, с помощью теоремы о совершенных графах.

14. (1.5 балла). Доказать, что дополнение к двудольному графу является совершенным графом.

15. (1.5 балла). Напомним, что реберным графом (line graph) $L(G)$ графа G называется граф, вершинам которого соответствуют ребра графа G. При этом две вершины $e, f \in L(G)$ реберного графа смежны в $L(G)$, если они имеют общую концевую вершину в графе G. Доказать, что реберный граф любого двудольного графа является совершенным.