(лекция №3)

① Еще раз о задачах раскладки по ящикам и урновых схемах

1. Еще раз: начнем с k-сочетаний из n элтов без повторения. По опр-ю, это — k-подмнво n-мнва различимых элтов.

<u>В урновой схеме</u>: мы берем ~~мн-во~~ в начале ~~урны~~ n-мнва, берем урн свиой, нах. n различимых элтов, выбираем из нее k элтов (k-подмнво); сделать это можно $\binom{n}{k}$ способами. Затем мы складываем ~~этих~~ их в корзину, в кот. эти k элтов не различаются ~~(или в k неразличимых ячеек)~~ складываемых по.

<u>В схеме раскладки</u> k неразличимых шаров по n различимым ящикам при условии, что в $\forall$ ящике может находиться не более 1 шара: мы в начале n-мнва берем мнво различимых <u>ящиков</u>; затем выбираем из него k-подмнво ~~различимых~~ ящиков (что также можно сделать $\binom{n}{k}$ способами); ~~раскладем в эти k ящиков по одному шару~~. каким образом? Размещая в этих k ~~~~ (различимых для нас) ящиках по одному шару.

Как это связано с ~~решением ур-ия~~ разбиением числа k на слагаемые, т.е. с ~~решен~~ ~~ур-ия~~ подсчетом числа решений ур-ия в целых числах

$$a_1 + \ldots + a_n = k$$

при условии, что $a_i = 0$ или 1

и порядок слагаемых — важен?

Да с.о.: ~~a_i — это ящик~~ индекс i указывает нам на $i^{\text{й}}$ ящик; я могу его выбрать (положив $a_i = 1$) или не выбрать ($a_i = 0$). Но: чтобы получить в сумме k, мне нужно выбрать таким образом ровно k ~~~~ a_i-ых, а это я могу сделать $\binom{n}{k}$ способами.

<u>Пример</u>: решить ур-е $a_1 + a_2 + a_3 = 2$ при — // —:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 1 + 0 \\ 1 + 0 + 1 \\ 0 + 1 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = \binom{3}{2} \text{ варта.}$$

<u>Пример</u>: У отца есть 5 апельсинов (~~~~ неразличимых) кот. он может раздать 8 своим сыновьям; он хочет сделать это так, чтобы апельсины достались max числу сыновей ⇒ условие: $\forall$ сын получает не более 1 апельсина. Сколькими способами он может это сделать? $\binom{8}{5}$.

2. Теперь: что такое k-сочетание из n эл-тов с повторениями? Это, если раз k-мультимножество над n-мн-вом различимых эл-тов, т.е. (неупорядоченная) сов-ть из k элементов, в которой

элемент $x_1 \in X$ встречается a_1 раз, $a_1 \geq 0$;

элемент $x_2 \in X$ встречается a_2 раз, $a_2 \geq 0$ ...

– – – – –

элемент $x_n \in X$ встречается a_n раз, $a_n \geq 0$,

причем

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k.$$

(монеты в кошельке: 15 монет 9 различных достоинств).

Число таких k-сочетаний $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ или сочетаний: оно $= \binom{n+k-1}{n}$.

В урновой схеме: мы берем n-мн-во различимых эл-тов (4 различных вида пирожных), выбираем из него k-мультимножество (7 пирожных) $\binom{n+k-1}{n}$ способами, и затем складываем их в корзину (коробку для пирожных).

В схеме раскладки k неразличимых шаров по n различимым ящикам при условии, что в $\forall$ ящик можно класть $\forall$ число шаров: мы выбираем из n-мн-ва X, $|X| = n$ ящиков k-мультимножество, складывая a_1 шаров в 1й ящик, a_2 шаров во 2й ящик, ..., a_n шаров в nй ящик, при условии, что $\sum a_i = k$.

Как это связано с разбиением числа k на слагаемые т.е. с подсчетом числа решений ур-ия в целых числах

$$a_1 + \dots + a_n = k,$$

при условии, что $a_i \geq 0$ и порядок эл-тов важен?

Ответ: индекс (i) указывает номер ящика; мы в него можем положить a_i единиц, где $a_i = 0, 1, \dots, k$, так, чтобы во всех n ящиках в результате оказалось k единиц.

Пример: $n = 2$, $k = 4$:

$$a_1 + a_2 = 4:$$
$$0 + 4 = 4$$
$$4 + 0 = 4$$
$$1 + 3 = 4$$
$$3 + 1 = 4$$
$$2 + 2 = 4$$

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{2}{4}\!\right) = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5.$$

Пример: У отца по-прежнему 5 апельсинов, но теперь он не распределяет их поровну, а раздает по каким-то там законам $\Rightarrow$ $\forall$ сын м. получить $\forall$ число апельсинов. Сколькими способами он может это сделать? $\left(\!\binom{8}{5}\!\right) = \binom{12}{5}$.

3. Переходим теперь к задачам о раскладке k различимых предметов по n различимым же ящикам.

1) Есть раз: в случае, когда в $\forall$ ящик я могу положить $\forall$ кол-во предметов (различимые монеты в 2 кармана): $\forall$ предмет я могу положить в $\forall$ из n ящиков $\Rightarrow$ $\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{n^k}$ способов.

2) Если я могу положить не более одного предмета в $\forall$ ящик: 1й предмет – в $\forall$ из n ящиков, 2й – в $\forall$ из оставшихся $(n-1)$ ящиков и т.д. $\Rightarrow$ всего $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=(n)_k$ способов.

④ Подсчет числа отображ. конечных мн-в. Число $S(n,k)$ сюръективных отображ.

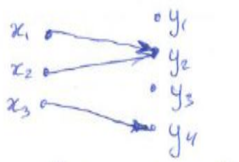
4. Почему это так важно? Да потому, что эти задачи на самом деле, связаны с (и даже эквивалентны) задачам о подсчете числа всех различных отображ. из конечного k-мн-ва X в конечное же n-мн-во Y.

1) Определение. f наз. отображением из X в Y, если для

$$\forall x\in X \quad \exists!\, y\in Y:\quad y=f(x).$$

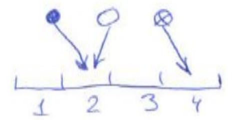
Так вот, это есть – не что иное, как некоторый вариант раскладки k различимых шаров по n различимым ящикам:

Пример:



$f(x_1)=y_2$
$f(x_2)=y_2$
$f(x_3)=y_4$

$\Longleftrightarrow$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ общее число всех отображ. из X в Y равно n^k (!).

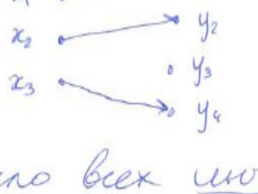
2) Вспомним теперь опр-е инъективного отображ-я:

Опр-е: $f: X\to Y$ наз. инъективным, если $\forall x_1, x_2$: если

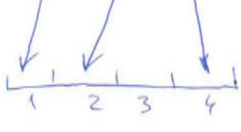
$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

($\forall$ образ имеет не более одного прообраза):

Пример:



$\Longleftrightarrow$

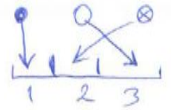


$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ общее число всех инъективных отображ. из X в Y равно $(n)_k$, причем очевидно $n\geq k$.

3) С биективными отображениями: $\forall y \in Y\ \exists!\, x \in X:\ y = f(x)$ –

все просто:



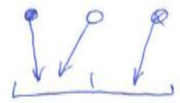
$\Longrightarrow$ их число $= (n)_n = n!$

4) А вот теперь давайте разбираться с т.н. сюръективными отображениями.

Опред: $f: X \mapsto Y$ наз. сюръективным (или отображением на), если для $\forall y \in Y\ \ \exists x \in X: \quad y = f(x)$.

Пример:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] x_1 \arrow[r] & y_1 \\ x_2 \arrow[ur] & \\ x_3 \arrow[r] & y_2 \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow$$



Очевидно, что $|X| \geq |Y|$. В этой связи: по традиции считают, что $|X| = n$, $|Y| = k \Longrightarrow n \geq k$ (так будет удобнее). Затем, когда будем строить таблицу всех вариантов, мы про это вспомним и поменяем n и k местами.

Так вот, как же сосчитать число всех возможных сюръективных отобр-ий? Иными словами, каково общее кол-во способов раскладок n различимых шаров по k различимым ящикам при условии, что в $\forall$ ящике должен находиться хотя бы один шар?

Это число обозначим $\hat{S}(n,k)$. Оказывается, для него уже $\nexists$ никаких простых ф-л, и найти его будет не так уж и просто.

5) Пример. Подсчитаем $\hat{S}(n,k)$ для случая $n=3$, $k=2$:

$\underset{1\quad 2}{\lfloor 12 \mid 3 \rfloor}$, $\underset{1\quad 2}{\lfloor 1 \mid 23 \rfloor}$, $\underset{1\quad 2}{\lfloor 2 \mid 13 \rfloor}$, $\underset{1\quad 2}{\lfloor 23 \mid 1 \rfloor}$, $\underset{1\quad 2}{\lfloor 3 \mid 12 \rfloor}$, $\underset{1\quad 2}{\lfloor 32 \mid 1 \rfloor}$ $\Longrightarrow \hat{S}(3,2) = 6$

Всего же имеем $k^n = 2^3 = 8$ отобр-ий: еще есть $\underset{1\quad 2}{\lfloor 123 \mid \varnothing \rfloor}$, $\underset{1\quad 2}{\lfloor \ \mid 123 \rfloor}$ – 2 вар-та.

Как подсчитать это число в общем случае?

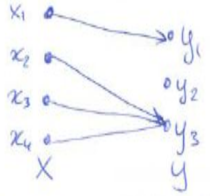
5. Подсчитаем $\hat{S}(n,k)$.

Для этого

1) Рассмотрим ~~мно~~ мн-во всех отображений из n-мн-ва X в k-мн-во Y. Число таких отображений $= k^n$. Наша задача — разбить это мн-во на блоки. Как?

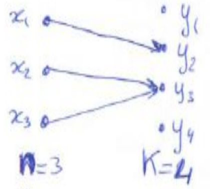
2) $\forall$ отображение $f: X \to Y$ есть сюръекция мн-ва X на мн-во $\mathrm{Im} f = \{y \in Y \mid \exists x: y = f(x)\}$. Что имеется в виду?

Пример:



$\Rightarrow$ $f: X \to Y$ — есть сюръекция мн-ва $\{x_1, \ldots, x_4\}$ на подмн-во $\underbrace{\{y_1, y_3\}}_{=\mathrm{Im} f}$ мн-ва Y.

Заметим, что это верно для $\forall$ значений n и k; например,



$\Rightarrow$ $f: X \to Y$ — есть сюръекция мн-ва $\{x_1, \ldots, x_3\}$ на подмн-во $\mathrm{Im} f = \{y_2, y_3\} \subseteq Y$.

Очевидно, однако, что $|\mathrm{Im} f| \leq n = |X|$.

3) Так вот, разобьем все мн-во функций $f: X \to Y$ на блоки, включив в i-й блок все отображения, образ $\mathrm{Im} f$ которых содержит ровно i эл-тов: $|\mathrm{Im} f| = i$. Все, что нам осталось — сосчитать число эл-тов в i-м блоке.

а) $\exists \binom{k}{i}$ способов выбрать i-элементное подмн-во k-мн-ва Y

б) $\exists \hat{S}(n,i)$ сюръективных функций, действующих из X в это подмн-во

в) Т.о., по правилу произв. число эл-тов в i-м блоке $=$

$$= \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ г) По правилу суммы,

$$k^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i)$$

д) Считая, что $\left[\begin{array}{l} \hat{S}(n,0) = 0 \ (\text{не } \exists \text{ сюръективных функций в } \varnothing) \ \forall n \\ \hat{S}(n,i) = 0, \text{ при } i > n \ (\text{таких сюръекций } \nexists), \end{array}\right.$

окончательно получим $\boxed{k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i)}$

4) Но: мы получили выражение для общего числа функц. (которое мы и так знаем} — оно $= K^n$) через число $\hat{S}(n,i)$ сюръективных функц.; нам же нужно, обратно, выразить $\hat{S}(n,k)$ через i^n — нужны т.н. ф-ии обращения: $\exists$

$(f_0, f_1, f_2, \dots)$, $(g_0, g_1, g_2, \dots)$ — 2 числовые посл-ти, и

$$\exists \quad f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \Rightarrow g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} f_i \quad \text{— док-ть!}$$

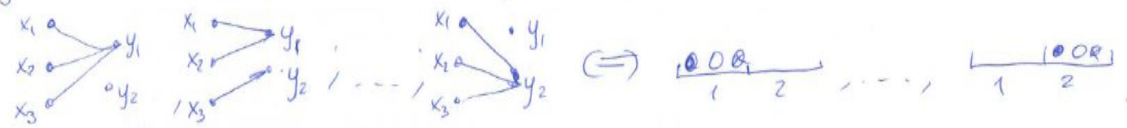
5) Тогда, считая n параметром для $\hat{S}(n,k)$ получаем явное выраж. вида

$$\boxed{\hat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n}$$

(5) Подсчет числа разделений и упорядоченных разбиений мн-ва. Перестановки с повторениями.

1. Дадим еще одну комбинаторную интерпретацию числа отображ. f из n-мн-ва X в k-мн-во Y, $\Leftrightarrow$ числу размещений n различ. предм. по k различ. ящ.

Рассмотрим пример: $\exists$ $|X| = 3$, $|Y| = 2 \Rightarrow$ имеем $2^3 = 8$ различных отображ. X в Y, а именно:



Перепишем рез-т с.о.: $(\{x_1, x_2, x_3\}, \varnothing)$; $(\{x_1, x_2\}, \{x_3\})$; $\dots$; $(\varnothing; \{x_1, x_2, x_3\})$. Что же мы видим? Мы видим, что задача расклад. n различных предметов по k различимым ящикам полностью эквивалентна задаче о поиске всех k-разделений n-мн-ва. Иными словами, $\forall$ отобр. $f: X \to Y$, $|X| = n$, $|Y| = k$, дает нам некоторый вариант разделения мн-ва X на k упорядоченных блоков, среди кот. м.б. и пустые. (!)

2. Рассмотрим вначале частный случай 2-разделений n-мн-ва X. Утверждается, что число всех таких разделений $= 2^n$, а число 2-разделений на 2 блока в одном из кот. имеется k эл-тов, а во 2-м — $(n-k)$ эл-тов, $=$, очевидно, $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{n-k}$.

2. Рассмотрим теперь специальный вид k-разбиений n-мнва X, а именно, рассмотрим такие k-разбиения X, в кот. в 1-м блоке содержится a_1 элнт, во $2^{\text{м}}$ – a_2 элта, ..., в k-м – a_k элтов; очевидно, что ~~...~~ при этом сумма

$$a_1 + \ldots + a_k \underline{\text{д.б. равна}}\ n$$

<u>Th</u> **Колво** <u>таких</u> k-разделений n-мнва X равно

$$\binom{n}{a_1}\cdot\binom{n-a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}}{a_k}.$$

1) Действительно, в $\forall$ k-разделении мнва X первые a_1 элтов мнва X, принадлежащие 1-му блоку X_1, м. б. выбраны $\binom{n}{a_1}$ способами.

2) После выбора этих a_1 элтов элты $2^{\text{го}}$ блока X_2, $|X_2| = a_2$, можно выбрать $\binom{n-a_1}{a_2}$ способами...

3) Наконец, после выбора элтов в первые $(k-1)$ блоков элты $k^{\text{го}}$ блока, X_k, $|X_k| = a_k$, м. б. выбраны

$$\binom{n-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_k} = \binom{a_k}{a_k} = 1 \text{ способами, т.е}$$

однозначно.

4) В резте, по правилу прил получаем ~~...~~, что общее чис тких k-разбиений равно

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_k}.$$

3. <u>Следствие</u> Используя явную фу для бином. коэфтов $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, несложно ~~...~~ убедиться, что

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\ldots a_k!} =: P(n;a_1,\ldots,a_k)$$

А что это за выражение? Это – не что иное, как число ~~всех перестановок~~ $P(n;a_1,\ldots,a_k)$ всех перестановок мнва X с повторениями.

Что это такое?

4. Рассмотрим следующую задачу: на полке имеются 15 ~~книг~~ различных книг по математике, 16 – по инф-тике, 12 – по физике. Каково число способов расстановки этих книг на полке?

Очевиден ответ: $(15+16+12)! = 43!$

А если мы теперь ~~все будем~~ перестанем различать книги по мат-ке, книги по инф-ке и книги по физике? Очевидно, что число различных способов расстановки этих книг $P(43; 15, 16, 12)$ уменьшится: $\exists\ P(43; 15, 16, 12)$ – число таких способов расстановки. Так как $\exists\ 15!$ способов упорядочить книги по м., $16!$ – по инф-ке и $12!$ – по физике, то, по правилу пр-ия,

$$P(43; 15, 16, 12) \cdot 15! \cdot 16! \cdot 12! = 43! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(43; 15, 16, 12) = \frac{43!}{15!\,16!\,12!}$$

Это число и наз. числом перестановок n-мн-ва X с повторениями. В общем случае, когда мы среди n предметов имеем a_1 неразличимых предметов 1-го сорта, a_2 – 2-го сорта, .., a_k – k-го сорта, мы для кол-ва различных перестановок таких предметов имеем выр-е

$$P(n; a_1, \ldots, a_k) = \frac{n!}{a_1! \ldots a_k!}$$

---

5. Заметим, что кол-во различных перестановок n предметов 2-х различных сортов равно

$$P(n; k, n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} -$$

числу различных k-элтных подмн-в n-элтного мн-ва. Как этот формальный рез-т д-ть комбинаторно?

Очевидно, нужно устроить биекцию между мн-вом всех k-элтных подмн-в мн-ва X, $|X| = n$, и мн-вом упорядоченных строк длины n, состоящих из k элтов u_1 и $(n-k)$ элтов u_2. ~~Очевидно, что~~ (т.е. (или k единиц и $(n-k)$ нулей).

$\Rightarrow$ ...

6. Еще одна полезная биекция, связанная с числом перестановок с повторениями — это биекция, ~~Кажд~~ связанная с числами $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Именно, ∃ имеем k-мультимнво над мнвом X размером n; его, как мы уже говорили, можно получить, ~~склад~~ раскладывая k неразличимых предметов по n различимым ящикам:

$$|\circ\circ||\circ\circ\circ|||\circ\circ|\circ||$$
1 2 3 45 6 7 8

Теперь: мы имеем k неразличимых предметов (шаров) и $(n-1)$ неразличимых перегородок между ними; $\forall$ перестановка этих предметов 2х видов дает нам некоторое k-мультимнво (или некот. способ раскладки k нераз. шаров по n различимым ящикам) $\Rightarrow$ колво таких k-мультимнв $=$

$$= \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = P(n+(k-1);\, n, k-1) = \frac{(n+k-1)}{n!\,(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n}.$$

7. Теперь: возвращаемся к общему случаю ~~в~~ разделения n-мнва X на k упорядоченных подмнв, таких, что $|X_i| = a_i$, $\sum a_i = n$: задание: доказать комбинаторно, ~~что~~ что колво таких k-разбиений $=$ числу $P(n; a_1, \dots, a_k)$ перестановок n элтов с повторениями элементов k разных видов.

Указание: устроить биекцию между мнвом всех таких k-разбиений и мнвом перестановок упорядоченных n-строк $(v_1, \dots, v_n)$ над алфавитом из k-элтного мнва $U = \{u_1, \dots, u_k\}$.

8. Как мы уже говорили, число всех k-разбиений n-мнва X = колву всех отображений f из n-мнва X в k-мнво $Y \Rightarrow$ равно $k^n \Rightarrow$ имеем соотношение

$$k^n = \sum_{\substack{a_1+\dots+a_k=n \\ a_i \geq 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}$$

Теперь: если мы ~~добавим ограничение в~~ будем рассматривать не разделения, а упорядоченные разбиения n-мнва X на k блоков (т.е. запретим, чтобы в списке ~~все~~ из k подмнв встречались пустые мнва), то получим, ~~все отображения~~ что их колво $=$ $=$ колву всех сюръективных отображений $f: X \to Y$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\hat{S}(n,k) = \sum_{\substack{a_1+\dots+a_k=n \\ a_i > 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}}$$

2я, точнее очень полезная формула для $\hat{S}(n,k)$.

6) Задачи, связанные с размещением n различимых предметов по k неразличимым ящикам. Числа Стирлинга II рода

1. Итак, мы доказали, что число всех упорядоченных разбиений n-мнва X на k блоков равно $\hat{S}(n,k)$. Пусть теперь $S(n,k)$ – это число неупорядоченных разбиений (или просто k-разбиений) n-мнва X на k блоков. Как связаны между собой числа $\hat{S}(n,k)$ и $S(n,k)$?

1) Очевидно, что для $\forall$ неупорядоченного разбиения n-мнва X на k блоков $\exists$ $k!$ способов упорядочить эти блоки $\Rightarrow$

$$\hat{S}(n,k) = k!\ S(n,k) \Rightarrow$$

Следствие: $k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(n-i)!} \hat{S}(\ldots = \sum_{i=0}^{k} (k)_i S(\ldots$

$$\Rightarrow \boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_k=n \\ a_i>0}} \frac{n!}{a_1!\ldots a_k!}}$$

$S(n,i)$ – матр. перехода от базиса x^n к базису (x)…

2) Опр. Колво (неупорядоченных) разбиений n-мнва на k блоков наз. числом Стирлинга II рода $S(n,k) \equiv \left\{ {n \atop k} \right\}$

3) Пример. Пусть $X = [4] \overset{\text{def}}{=} \{1,2,3,4\}$, пусть $k=2$ – 2 блока $\Rightarrow$ имеем 7 различных 2-разбиений мнва X на 2 блока:

$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$; $\{\{1,2,4\},\{3\}\}$; $\{\{1,3,4\},\{2\}\}$, $\{\{2,3,4\};\{1\}\}$; $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$; $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$; $\{\{1,4\},\ldots$

4) С т. зрения раскладки предметов по ящикам числа Ст. II рода есть колво способов размещения n различимых предметов по k шт неразличимым ящикам при условии, что в $\forall$ ящике должен находиться хотя бы один предмет.

5) А как сосчитать колво таких раскладок без ограничений на колво предметов в ящиках? Покажем, что в этом случае это колво =

$$\boxed{B(n,k) := \sum_{i=1}^{k} S(n,i)}$$

Действительно, разобьем все мнво таких раскладок на блоки: в $1^{\text{й}}$ блок поместим раскладки, в кот. занят лишь один ящик (не важно, какой); во $2^{\text{й}}$ блок – 2 ящика (не важно, каких), … $\Rightarrow$

6) Замечание. В случае различимых ящиков: в $\forall$ $i^{\text{м}}$ блоке имеем $\binom{k}{i} \hat{S}(n,i)$ эл-тов. Здесь: ящики неразличимы $\Rightarrow$ все способы выбора i ящиков из k совпадают $\Rightarrow$ просто Σ.