

СВЯЗНОСТЬ В ГРАФАХ

1 Вершинная и реберная связность графа

1.1. Любая коммуникационная сеть тем более надежна, чем большее количество вершин и/или ребер нужно удалить в графе (или в орграфе), моделирующем эту сеть, для того, чтобы эту сеть оборвать. Раздел теории графов, описывающий такого рода свойства надежности, называется теорией связности. К изучению этой теории мы и приступаем в данном параграфе.

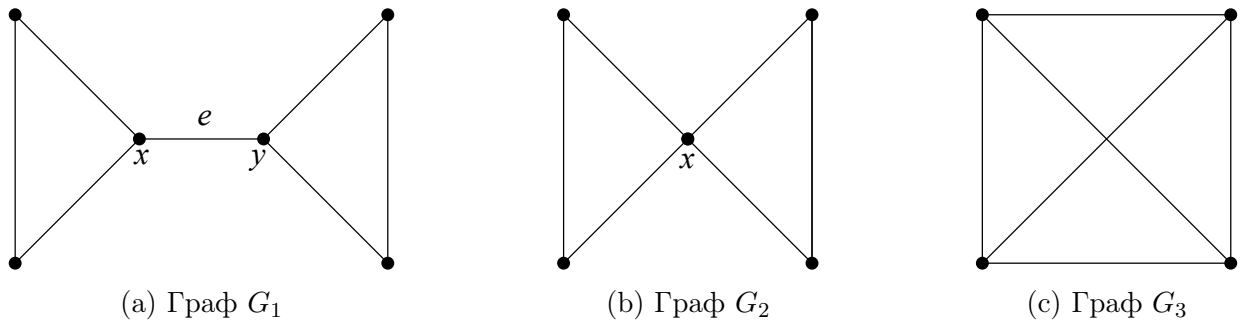


Рис. 1

1.1.1. Рассмотрим в качестве примера три графа, изображенные на рис.1. Видно, что с точки зрения надежности все эти три графа достаточно сильно отличаются друг от друга. Показанный на рис.1,а граф G_1 наименее надежен — его можно превратить в несвязный удалением как одной из двух вершин x или y , так и удалением ребра $e = \{x, y\}$ (моста графа G_1). Граф G_2 (рис.1,б) с этой точки зрения выглядит лучше — у него нет ни одного ребра, удалив которое, мы развалим G_2 на несколько связных компонент. Однако у него имеется вершина x (точка сочленения графа G_2), удаление которой приводит к потере связности графа. Наконец, граф G_3 с рассматриваемой точки зрения является наиболее надежным — у него нет ни мостов, ни точек сочленения, удаление которых приводит к потере связности графа.

Про граф G_1 говорят, что он реберно и вершинно односвязен, про граф G_2 — что он вершинно односвязен, но реберно двусвязен, а про граф G_3 — что он реберно и вершинно двусвязен. Наша задача состоит в том, чтобы дать формальное определение этих понятий.

1.1.2. Начнем мы с понятия реберной связности графа G . Напомним, что в главе, посвященной деревьям, мы дали понятие реберного разделяющего множества F , реберного разреза ∂X , а также минимального реберного разреза. Выберем среди всех минимальных реберных разрезов графа G тот, количество ребер в котором минимально.

Определение 1.1. *Реберной связностью $\lambda(G)$ графа G называется количество ребер в минимальном реберном разрезе графа.*

В случае несвязного графа или графа \bar{K}_n реберная связность считается равной нулю.

Определение 1.2. Граф G , построенный на n вершинах, называется *реберно k -связным*, если $\lambda(G) \geq k$. Иными словами, такой граф остается связным при удалении любых ребер в количестве, строго меньшем k .

Например, любой граф, в котором имеется мост, является реберно односвязным графом, но реберно двусвязным он уже не является. Любой цикл C_n является реберно односвязным и реберно двусвязным, однако реберно трехсвязным он уже не является. Наконец, полный граф K_n в случае $n > 1$ является реберно $(n - 1)$ -связным графом.

Ясно, что любой реберно k -связный граф является также реберно i -связным для любых i , $0 \leq i \leq k$.

1.1.3. Перейдем теперь к определению вершинной связности графа G .

Определение 1.3. Подмножество $S \subset V(G)$ называется *вершинным* разделяющим множеством или *вершинным разрезом* графа, если при удалении вершин из множества S граф $G - S$ становится несвязным.

Определение 1.4. *Вершинной связностью* $\kappa(G)$ называется минимальное количество вершин $|S|$, $S \subset V(G)$, которое нужно удалить для того, чтобы граф $G - S$ стал несвязным или же содержал единственную вершину.

Замечание 1.5. У полного графа K_n , построенного на n вершинах, вершинное разделяющее множество отсутствует — удаление любого количества вершин $|S|$ в этом графе не нарушает его связности. Для того, чтобы распространить понятие k -связности и на полные графы, нам и нужна оговорка “или же содержит единственную вершину”. Используя эту оговорку, мы можем, по сути, по определению, положить $\kappa(K_n) = n - 1$.

Как следствие, граф K_1 , состоящий из единственной изолированной вершины, имеет связность, равную нулю. Ребро K_2 имеет связность, равную единице. Полный граф K_3 на трех вершинах имеет связность, равную двум, а дерево T_3 — связность $\kappa(T_3) = 1$. Первый нетривиальный простой граф с $\kappa = 2$ — это квадрат D_4 .

1.1.4. Связность можно также определить, используя понятие (вершинно) k -связного графа.

Определение 1.6. Граф G называется (вершинно) k -связным, если он построен на $n \geq (k + 1)$ вершине, и при удалении любых вершин графа G в количестве, меньшем, чем k , граф остается связным.

Определение 1.7. Вершинной связностью $\kappa(G)$ графа G называется максимально возможное k , для которого граф остается вершинно k -связным.

При таком подходе связность полного графа отдельно оговаривать не надо.

Пример 1.8. Граф K_4 с $\kappa(K_4) = 3$ является 1-связным, 2-связным и 3-связным, но не 4-связным графом, хотя бы потому, что он построен на четырех вершинах.

1.2. Наша следующая задача состоит в том, чтобы получить какие-то простейшие оценки на числа $\lambda(G)$ и $\kappa(G)$.

1.2.1. Обозначим через $\delta(G)$ минимальную из степеней вершин графа G . Достаточно очевидно, что реберная связность графа ограничена сверху значением $\delta(G)$. Действительно, удаление всех ребер, инцидентных вершине x с $\deg(x) = \lambda(G)$, превращает любой граф в несвязный.

Несколько менее тривиальным является следующее

Утверждение 1.9. Для любого простого графа G справедливо неравенство

$$\kappa(G) \leq \lambda(G).$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое минимальное реберно разделяющее множество $[S, \bar{S}] = \{e_1, \dots, e_k\}$, $k = \lambda(G)$, в графе G . Нам нужно показать, что в графе G найдется не более чем k вершин, удаление которых приведет к появлению нескольких несвязных компонент.

На первый взгляд кажется, что данное утверждение доказать несложно. Действительно, удалим для каждого ребра e_i из разреза $[S, \bar{S}]$ одну из двух инцидентных этому ребру вершин. Удаляя такую вершину, мы удаляем и все инцидентные ей ребра, в том числе и ребро e_i . Заметив теперь, что количество таких вершин не превосходит количества ребер в множестве $[S, \bar{S}]$, мы, казалось бы, доказываем требуемое неравенство.

Проблема, однако, состоит в том, что удаление таких вершин не всегда приводит к появлению несвязных компонент в графе. Действительно, рассмотрим, к примеру, дерево T_n , построенное на $n \geq 2$ вершинах. Понятно, что для него $\lambda(T_n) = \kappa(T_n) = 1$. Удаление любого ребра e приводит к появлению двух компонент связности в графе $T_n - e$. Однако, удаляя в этом графе произвольный лист x , мы получим односвязный граф $T_n - x = T_{n-1}$. Поэтому для доказательства неравенства $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ нам нужно действовать чуть более осторожно.

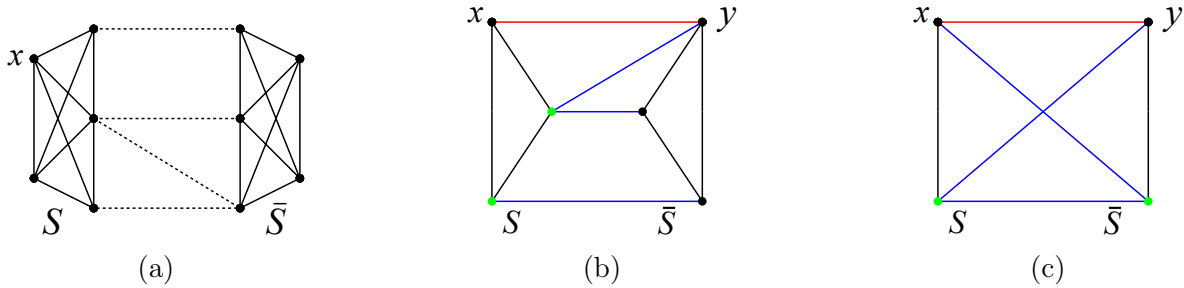


Рис. 2

Предположим вначале, что хотя бы в одном из подмножеств S, \bar{S} найдется вершина $x \in V(G)$, не являющаяся инцидентной ни одному из ребер $e_i \in [S, \bar{S}]$ (см.рис.2,а). Предположим для определенности, что эта вершина принадлежит подмножеству S . Тогда, удаляя все вершины y_i блока S , инцидентные ребрам из $[S, \bar{S}]$, мы обязательно получим как минимум две компоненты связности — одну, содержащую вершину x , и вторую, содержащую одну или несколько вершин z_i блока \bar{S} , инцидентных ребрам e_1, \dots, e_k исходного графа G . Так как количество удаленных вершин не превосходит $k = \lambda(G)$, то мы получаем, что $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Рассмотрим теперь граф G , в котором любая вершина инцидентна одному из ребер e_1, \dots, e_k разреза $[S, \bar{S}]$ (см.рис.2,б). Наиболее естественным в этом случае кажется подход, при котором мы удаляем только часть вершин из S и часть вершин из \bar{S} — в таком случае у нас останутся какие-то вершины и в S , и в \bar{S} , и после удаления этих вершин граф перестанет быть связным. Все, что нам остается — это доказать, что данный подход мы всегда сможем реализовать.

Для этого зафиксируем в разрезе $[S, \bar{S}]$ какое-то ребро $e = \{x, y\}$, соединяющее вершины $x \in S$ и $y \in \bar{S}$ (ребро, помеченное красным цветом на рис.2,б). Удалим теперь оставшиеся $\lambda(G) - 1$ ребер разреза $[S, \bar{S}]$, удаляя вершины графа G , отличные от x и y . На рис.2,б такие вершины помечены зеленым цветом. При этом возможны два варианта развития событий. Первый отвечает случаю, при котором в графе останутся еще какие-то вершины, отличные от x и y (как раз такая ситуация изображена на рис.2,б). Как следствие, останутся вершины и в каком-то из

подмножеств S, \bar{S} . Предположим для определенности, что вершины остались в подмножестве \bar{S} (рис.2,b). Тогда мы можем удалить вершину $y \in \bar{S}$, и граф развалится на несколько компонент связности. Во втором варианте в графе не останется никаких других вершин, кроме вершин x и y (рис.2,c). Удаляя тогда одну из вершин, мы получим изолированную вершину, что допускается в определении вершинной связности графа. Но так как и в этом случае количество удаляемых вершин меньше или равно количеству удаляемых ребер, то у нас и здесь остается справедливым неравенство $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. \square

1.2.2. Таким образом, мы для произвольных графов доказали справедливость цепочки неравенств

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Простейший пример графа G , для которого эти неравенства являются строгими, показан на рис.3. Действительно, в таком графе $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, а $\delta(G) = 3$. Для полного графа, с другой стороны, все эти числа одинаковы и равны $(n - 1)$.

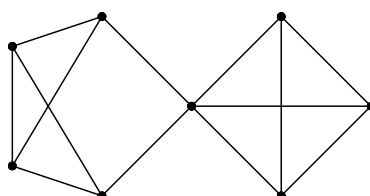


Рис. 3

2 Двусвязные графы

2.1. Вернемся к описанию односвязных графов. Все множество таких графов можно разбить на два блока, отнеся к первому блоку графы с $\kappa(G) = 1$, а ко второму блоку — все двусвязные графы. Мы знаем, что двусвязный граф — это граф, в котором отсутствуют точки сочленения. Исследуем поподробнее структуру графов с $\kappa(G) = 1$.

2.1.1. Напомним, что любой несвязный граф естественным образом разбивается на блоки — компоненты связности такого графа. Оказывается, что и любой граф с $\kappa(G) = 1$ также можно разбить на блоки, введя очень полезное отношение похожести на множестве $E(G)$ всех ребер графа G .

Определение 2.1. Два ребра называются *похожими*, если они либо совпадают (то есть любое ребро похоже на само себя), либо входят в один и тот же простой цикл.

Лемма 2.2. *Отношение похожести в связном графе G есть отношение эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны, так что нам остается проверить транзитивность. Пусть ребра e_1, e_2 входят в простой цикл C_1 , а ребра e_2, e_3 — в простой цикл C_2 графа G . Возьмем ребро e_1 и будем идти от него вдоль цикла C_1 в двух противоположных направлениях до тех пор, пока не дойдем до вершин x и y , $x \neq y$, принадлежащих циклу C_2 (смотри рисунок 4). Такие вершины обязательно найдутся хотя бы потому, что ребро e_2 входит в цикл C_2 , так что две инцидентные этому ребру вершины обязательно этому циклу C_2 принадлежат. Заметим теперь, что вершины x и y разбивают цикл C_2 на два простых пути, соединяющих данные вершины. Один из этих простых путей содержит ребро e_3 .

Объединяя этот простой путь с куском цикла C_1 , содержащим ребро e_1 и ограниченным вершинами x и y , получим простой цикл C , содержащий ребра e_1 и e_3 . Тем самым мы доказали, что ребра e_1 и e_3 похожи. \square

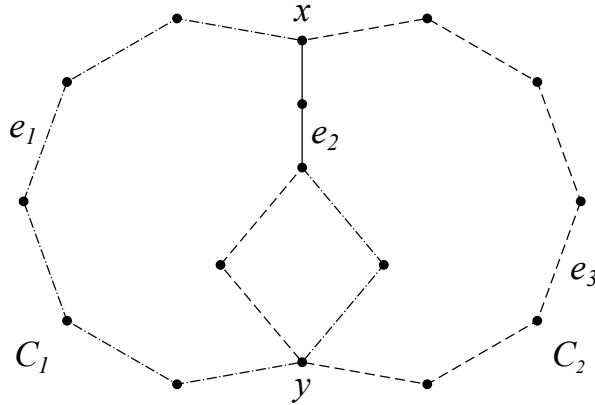


Рис. 4

2.1.2. Отношение похожести, как и любое отношение эквивалентности, разбивает множество $E(G)$ ребер на классы эквивалентности, называемые *блоками* связного графа G . Каждый такой блок представляет собой либо простое ребро K_2 , либо группу из нескольких ребер, объединенных в один или несколько пересекающихся между собой циклов. Оказывается, что такая группа ребер есть не что иное, как двусвязный подграф графа G . Именно, справедлива

Теорема 2.3. Пусть G есть связный граф, построенный на $n \geq 3$ вершинах. Следующие три утверждения равносильны:

- (1) граф G является двусвязным;
- (2) любые два ребра этого графа принадлежат некоторому циклу C ;
- (3) для любых двух вершин графа G существует цикл C , проходящий через эти вершины.

Доказательство. Предположим вначале, что граф G является двусвязным. Рассмотрим в таком графе любые два ребра $e_1 = \{x, y\}$ и $e_2 = \{x, z\}$, инцидентные одной и той же вершине x . Так как граф $G - x$ является связным, то существует простой путь P , соединяющий вершины y и z . Объединяя путь P с ребрами e_1 и e_2 , получаем простой цикл C в графе G .

Таким образом, любые два ребра, инцидентные одной и той же вершине двусвязного графа, принадлежат одному и тому же циклу. Иными словами, эти два ребра являются похожими. Но отношение похожести транзитивно, поэтому из похожести любых двух соседних ребер следует похожесть любых двух ребер графа G .

Пусть теперь любые два ребра графа G принадлежат некоторому циклу C . Выберем любые две вершины x_1, x_2 нашего графа и рассмотрим два различных ребра e_1 и e_2 , инцидентных этим вершинам. Цикл C , содержащий два этих ребра, обязательно проходит через выбранные нами вершины x_1 и x_2 .

Последнее, что осталось — это доказать, что если через любые две вершины графа G проходит цикл C , то граф является двусвязным, то есть не содержит точек сочленения. А это утверждение достаточно очевидно. Действительно, пусть такой граф содержит точку сочленения

$x \in V(G)$. Обозначим через G_1 и G_2 две компоненты связности, полученные в результате удаления вершины x , а через $y_1 \in G_1$ и $y_2 \in G_2$ — пару вершин, инцидентных вершине x в исходном графе. Так как в графе $G - x$ нет пути, соединяющего вершины y_1 и y_2 , то и в исходном графе G нет цикла, проходящего через эти вершины. Полученное противоречие доказывает нашу теорему. \square

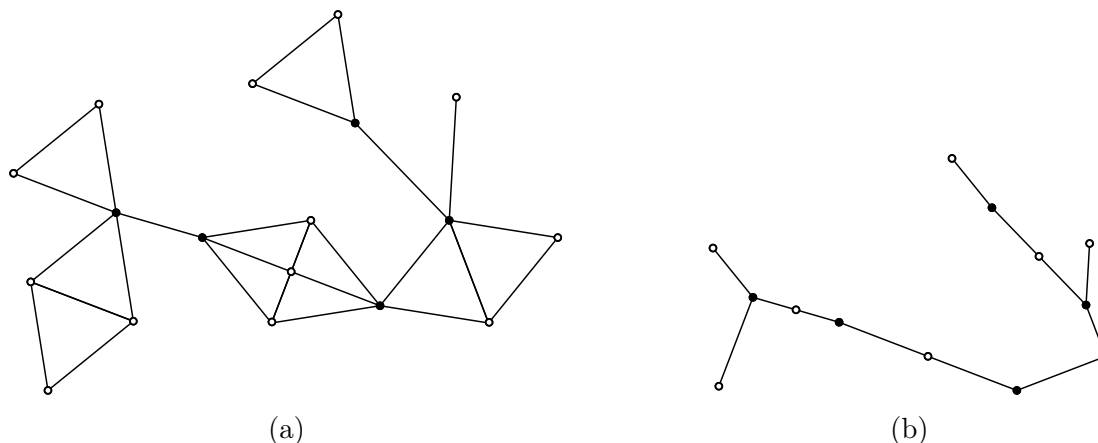


Рис. 5

2.1.3. Отношение похожести разбивает множество ребер произвольного односвязного графа G на блоки (смотри рис.5,а), представляющие собой либо ребра K_2 (мосты графа G), либо двусвязные подграфы графа G , максимальные по включению (то есть не содержащиеся ни в каком большем двусвязном подграфе). Эти блоки соединены между собой точками сочленения (черные вершины на рис.5,а).

Используя описанное выше разбиение, по графу G можно построить двудольный граф $B(G)$ (рис.5,б), описывающий блочную структуру исходного графа G . Одна доля графа $B(G)$ состоит из точек x_j сочленения графа G (черные вершины на рис.5,б), а вторая — из вершин b_i , каждая из которых отвечает некоторому блоку B_i исходного графа G (светлые вершины на рис.5,б). Вершины x_j и b_i соединяются в графе $B(G)$ ребром в случае, если в исходном графе вершина x_j принадлежала блоку B_i .

Понятно, что в построенном таким образом двудольном графе $B(G)$ циклов быть не может, то есть граф $B(G)$ является деревом. Это дерево называется деревом блоков и точек сочленения исходного графа G . Любая точка сочленения обязательно является внутренней вершиной дерева $B(G)$, тогда как вершины b_i , отвечающие блокам дерева G , могут быть как внутренними вершинами $B(G)$, так и его листьями. Блок, отвечающий листу дерева $B(G)$, называется крайним блоком графа G . Понятно, что блок графа G является крайним тогда и только тогда, когда он содержит только одну точку сочленения графа G .

2.2. Опишем алгоритм поиска точек сочленения в односвязном графе, линейный по количеству вершин и ребер в графе. Данный алгоритм был предложен в 1973 году Джоном Хопcroftом и Робертом Тарьяном и базируется на алгоритме обхода графа в глубину.

2.2.1. Пусть G есть простой односвязный граф. В результате алгоритма поиска в глубину мы получаем дерево $T(G)$ обхода графа с корнем в вершине x_0 — вершине, с которой мы начинаем обход графа (рис.6). В результате обхода все ребра графа разбиваются на два класса — ребра, принадлежащие дереву обхода (ребра, помеченные синим цветом на рис.6), а также ребра, дереву не принадлежащие (ребра, помеченные черным цветом на рис.6) — так называемые

обратные ребра.

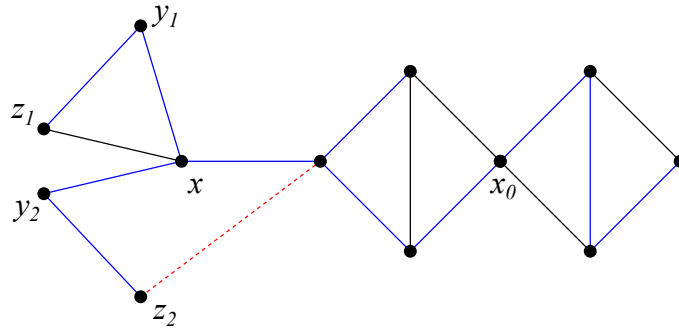


Рис. 6

Достаточно очевидно, что корень x_0 дерева $T(G)$ является точкой сочленения тогда и только тогда, когда он имеет два или более потомка в дереве обхода (см. вершину x_0 на рис.6). Действительно, после удаления x_0 смежные с x_0 вершины, являющиеся потомками x_0 в дереве $T(G)$, оказываются в разных компонентах связности графа $G - x_0$. Для того, чтобы понять, в каком случае вершина $x \neq x_0$ является точкой сочленения, рассмотрим подмножество y_i потомков вершины x в дереве $T(G)$ обхода графа G (см.рис.6). Предположим, что хотя бы для одной вершины y_i обратные ребра, исходящие из поддерева T_i с корнем в вершине y_i , либо вовсе отсутствуют (вершина y_2 на рис.6), либо оканчиваются в вершине x или в вершинах самого поддерева T_i (вершина y_1 на рис.6). В этом случае при удалении x граф G разваливается как минимум на две компоненты связности, то есть x является точкой сочленения. Если же в G существовало бы обратное ребро, исходящее, например, из точки z_2 и входящее в один из предков вершины x (см. пунктирное ребро, помеченное красным цветом на рис.6), то вершина x точкой сочленения бы не являлась.

2.2.2. Описанные выше наблюдения можно положить в основу алгоритма поиска точек сочленения. Именно, будем обходить граф G в глубину, пометая вершины графа в порядке этого обхода натуральными числами $k(x)$ из диапазона от 1 до $n = |V(G)|$. Наряду с $k(x)$ введем для каждой вершины графа функцию $l(x)$ следующим образом. Для стартовой вершины x_0 с $k(x_0) = 1$ положим $l(x_0) = 1$. Для всех остальных вершин $l(x)$ определим следующим образом:

$$l(x) = \min \begin{cases} k(x), \\ l(y_i), & \text{где } y_i \text{ — непосредственные потомки вершины } x \text{ в дереве } T(G), \\ k(z_j), & \text{где } z_j \text{ — предки вершины } x \text{ в } T(G), \text{ соединенные с } x \text{ обратным ребром в } G. \end{cases}$$

Вершина $x \neq x_0$ является точкой сочленения в случае, когда хотя бы для одного из ее потомков y_i значение $l(y_i)$ оказывается большим или равным номеру $k(x)$ вершины x :

$$\text{if } \exists y_i: \quad l(y_i) \geq k(x), \quad \text{then } x \neq x_0 \text{ is a cut point.}$$

Для корневой вершины x_0 достаточно подсчитать количество ее потомков в дереве $T(G)$. Если это количество больше единицы, то x_0 является точкой сочленения.

Результаты работы описанного выше алгоритма для графа G из рис.6 показаны на рис.7. Вершины этого графа помечены числами от 1 до 12 в порядке обхода этих вершин поиском в глубину. В скобках для каждой вершины i стоит соответствующее ей число $l(i)$. Красным цветом на этом рисунке помечены точки сочленения графа G . Действительно, у вершины 7 имеется потомок — вершина 8, значение $l(8) = 8$ которой больше номера вершины 7. Аналогичный факт

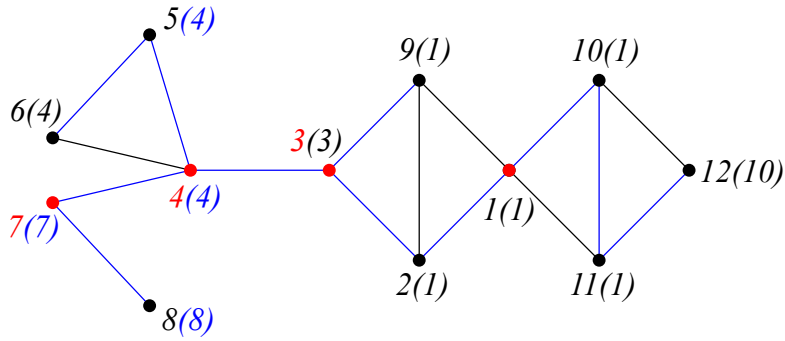


Рис. 7

справедлив для вершин 4 и 3 — у них имеются непосредственные потомки y_i с $l(y_i)$, большими или равными номерам этих вершин. Наконец, у вершины 1 имеются два потомка в дереве $T(G)$, так что 1 есть точка сочленения G .

2.3. Ранее мы достаточно подробно описали структуру графов с $\kappa(G) = 1$. Постараемся теперь понять структуру двусвязного графа.

2.3.1. Оказывается, существует достаточно удобный конструктивный способ построения двусвязного графа — любой такой граф может быть построен из некоторого цикла $C = P_0$ последовательным добавлением к нему так называемых ручек P_i .

Определение 2.4. Пусть H есть некоторый подграф графа G . Ручкой подграфа H в графе G называется простой путь P , концы которого принадлежат H , а все внутренние вершины которого этому подграфу не принадлежат (смотри рис.8,а).

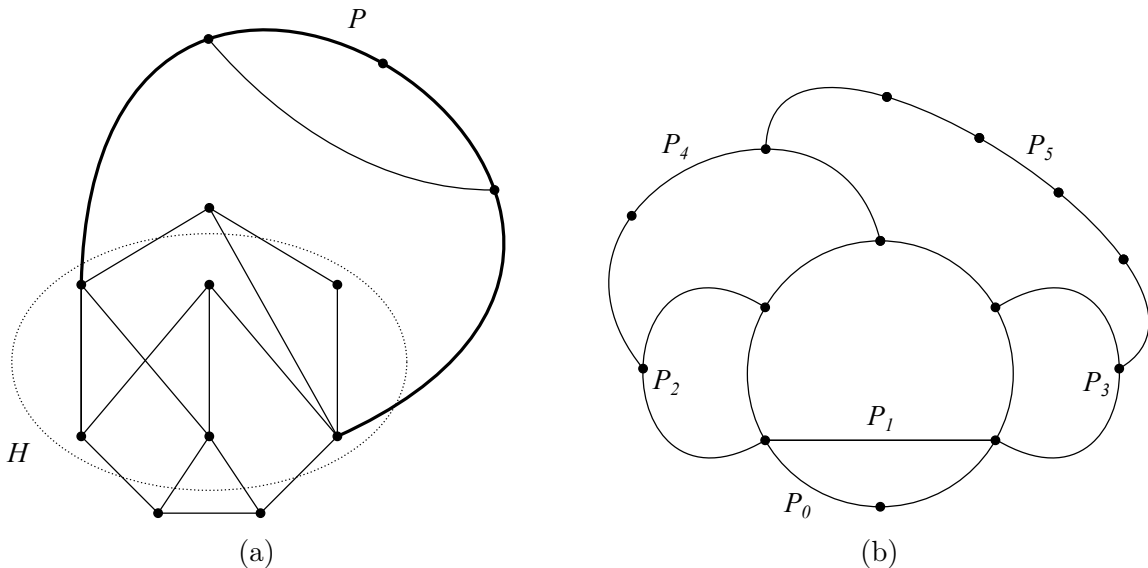


Рис. 8

Определение 2.5. Разложением графа G на ручки называется последовательность P_0, \dots, P_k подграфов графа G , такая, что P_0 представляет собой цикл, P_i для любого $i = 1, \dots, k$ представляет собой ручку для подграфа $G_{i-1} = P_0 \cup \dots \cup P_{i-1}$ графа G , а G_k совпадает с исходным графом G (смотри рис.8,б).

Утверждение 2.6. *Граф G является двусвязным тогда и только тогда, когда он допускает разложение G на ручки, начинающиеся с произвольного цикла в этом графе.*

Доказательство. Пусть граф G допускает разложение на ручки. Так как цикл P_0 является двусвязным графом, то нам достаточно показать, что добавление к графу G ручки P двусвязность графа $G \cup P$ не нарушит. Обозначим через x и y концевые вершины пути P . Заметим, что добавление ребра $\{x, y\}$ к графу G двусвязность не нарушит. Теперь заметим, что P представляет собой подразбиение ребра $\{x, y\}$ вершинами степени 2, а любое такое подразбиение также не нарушает двусвязность графа. Действительно, мы показали, что граф G двусвязен тогда и только тогда, когда любые два ребра принадлежат некоторому циклу, а последнее свойство, очевидно, в процессе подразбиения ребра $\{x, y\}$ не меняется.

Обратно, пусть G является двусвязным графом, C — произвольный цикл в нем. Построим разложение на ручки графа G , начиная с цикла $C = P_0$. Для этого рассмотрим граф G_i , полученный добавлением i ручек. Если $G_i \neq G$, то в G найдется ребро $e \in G - E(G_i)$, а также ребро $e' \in E(G_i)$. Так как граф G двусвязный, то эти ребра принадлежат некоторому общему циклу. Обозначим через P ту часть этого цикла, которая содержит ребро e , а также ровно две вершины $x, y \in V(G_i)$. По отношению к G_i путь P является ручкой. Продолжая далее, мы и получим разложение G на ручки.

2.3.2. Перейдем теперь к описанию реберно двусвязных графов. Мы знаем, что любой реберно двусвязный граф — это связный граф, не содержащий мостов. Такое описание имеет один недостаток — оно показывает нам, чего в графе быть не должно для того, чтобы он был реберно двусвязным. Нам же часто нужно более конструктивное описание такого графа, похожее на то, что мы только что дали для вершинно двусвязного графа.

Заметим, прежде всего, что в силу неравенства $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ любой вершинно двусвязный граф является одновременно и реберно двусвязным графом. Обратное, однако же, неверно. На рис.9 в качестве примера показан граф “бабочка”, являющийся реберно двусвязным, но имеющим точку сочленения x . Иными словами, реберно двусвязных графов больше, нежели чем вершинно двусвязных графов. Как следствие, декомпозиция реберно двусвязного графа должна быть несколько более сложной по сравнению с декомпозицией вершинно двусвязного графа.

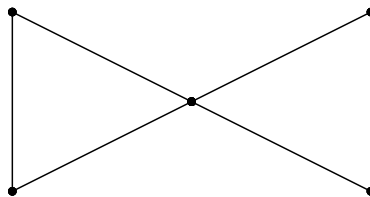


Рис. 9

Как видно из рис.9, реберно двусвязный подграф может содержать один или несколько циклов, имеющих с оставшейся частью графа только лишь одну общую точку. Такого рода цикл называется *замкнутой ручкой*. Можно доказать, что любой реберно двусвязный граф можно разложить на ручки и замкнутые ручки, начиная с произвольного замкнутого цикла C в исходном графе.

2.3.3. Заметим, в заключение, что понятие вершинной и реберной связности достаточно естественно переносится и на случай ориентированных графов. Так, например, вершинным разрезом называется подмножество $S \subset V(D)$ вершин орграфа D , такое, что при удалении S орграф

D перестает быть сильно связным, а мощность минимального из таких подмножеств называется вершинной связностью орграфа D .

Оказывается, что сильно связные орграфы в определенном смысле эквивалентны реберно двусвязным неориентированным графам. Именно, в упражнении ?? предлагается доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.7 (Robbins, 1939). *Граф G допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он является реберно двусвязным графом.*

3 k -связные графы. Теорема Менгера

3.1. Перейдем теперь к более общему понятию k -связных графов, а также к изложению основных фактов, связанных с этим понятием.

3.1.1. Отметим, прежде всего, простое следствие теоремы 2.3.

Следствие 3.1 (Whitney, 1932). *Граф, построенный на трех или более вершинах, является двусвязным тогда и только тогда, когда для любой пары x, y вершин графа G найдутся два простых пути, соединяющих x и y , и не имеющих общих внутренних вершин.*

Доказательство легко следует из теоремы 2.3 — любой проходящий через вершины x и y цикл можно рассматривать как пару простых путей, соединяющих эти вершины и не имеющих никаких других общих вершин. \square

Заметим, что отмеченное свойство можно рассматривать как альтернативное определение двусвязного графа, а именно, называть граф двусвязным в случае, если для любой пары вершин можно найти два простых пути, соединяющих эти вершины и не имеющих общих внутренних вершин.

Оказывается, данное утверждение имеет место и для произвольного k -связного графа — теорема, доказанная австрийским математиком Карлом Менгером в 1927 году, позволяет сформулировать понятие k -связного графа не на языке вершинного разреза, а на языке путей, соединяющих произвольную пару вершин в графе.

3.1.2. Для формулировки данной теоремы нам понадобится несколько вспомогательных понятий.

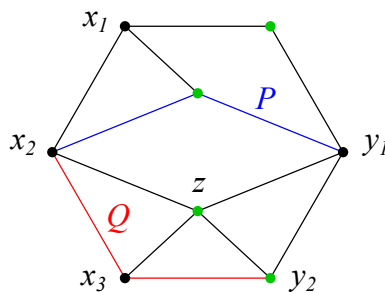


Рис. 10

Определение 3.2. Пусть $X, Y \subset V(G)$. Путем между X и Y называется любой простой путь P , начальная вершина которого принадлежит множеству X , конечная — множеству Y , а все внутренние вершины не принадлежат ни множеству X , ни множеству Y .

В качестве примера на рис.10 показаны подмножества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ вершин графа G , а также простой путь P , соединяющий X и Y (помечен синим цветом на рисунке). Помеченный красным цветом простой путь Q путем между X и Y не является — одна из внутренних вершин этого пути, а именно, вершина x_3 , принадлежит X , а такая ситуация в определении исключается.

Замечание 3.3. Не исключен случай, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Поэтому данным определением допускаются и так называемые *тривиальные* пути, каждый из которых состоит из единственной вершины $x \in X \cap Y$.

Так, для графа, изображенного на рис.10, мы в качестве X и Y можем выбрать подмножества $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$ и $Y = \{z, y_1, y_2\}$. В этом случае путь $P = (z)$ является тривиальным путем, соединяющим два этих подмножества.

3.1.3. Следующее понятие, которое нам понадобится — это понятие вершинного отделяющего множества R .

Определение 3.4. Пусть X, Y и R есть некоторые подмножества множества $V(G)$ вершин. Говорят, что R отделяет множество X от множества Y , если любой путь из X в Y проходит через вершины множества R .

На рис.10 зеленым цветом помечены вершины подмножества R , отделяющего X от Y .

Замечание 3.5. Обратим внимание на отличие вершинного отделяющего X от Y множества от вершинного разделяющего граф G множества. При удалении вершинного разделяющего множества граф становится несвязным. От множества, которое отделяет X от Y , этого не требуется. Действительно, само множество X отделяет X от Y , а граф $G - X$ вполне может остаться связным.

3.1.4. Обозначим через k количество вершин в минимальном отделяющем X от Y множестве. Как мы уже отмечали ранее, X всегда отделяет себя от Y и наоборот. Поэтому $k \leq \min(|X|, |Y|)$. В случае, если между X и Y пути отсутствуют, $k = 0$. В остальных случаях $k > 0$.

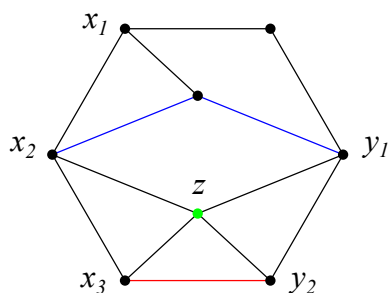


Рис. 11

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис.11. В этом графе в качестве отделяющего $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$ от $Y = \{z, y_1, y_2\}$ множества R можно выбрать подмножество Y . Возникает вопрос, является ли такое множество минимальным. Следующее утверждение позволяет получить ответ на этот вопрос.

Теорема 3.6. Пусть X, Y — пара подмножеств множества $V(G)$. Тогда количество k вершин в минимальном отделяющем X от Y множестве R совпадает с максимальным количеством l попарно непересекающихся друг с другом путей из X в Y .

Так, для множеств $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$ от $Y = \{z, y_1, y_2\}$, показанных на рис.11, имеются три попарно не пересекающиеся между собой пути, соединяющие вершины множества X с вершинами множества Y (пути, помеченные синим, красным и зеленым цветами на рисунке). Большее количество путей быть не может — это количество не может превосходить мощность множества Y . Следовательно, на основании теоремы 3.6, размер минимального отделяющего X от Y множества равен трем, так что Y является минимальным отделяющим X от Y множеством.

3.1.5. Приступим к доказательству теоремы 3.6. Понятно, что максимальное количество l попарно непересекающихся путей из X в Y не может превосходить количества k вершин в минимальном отделяющем X от Y множестве R — в противном случае, согласно принципу Дирихле, через какую-то вершину этого множества проходило бы два или более простых путей, чего быть не может. Теорема утверждает, что эти два числа на самом деле равны. Иными словами, нам нужно доказать, что в графе G обязательно найдутся ровно k непересекающихся путей из X в Y .

Сразу заметим, что в двух тривиальных случаях $k = 0$ и $k = 1$ теорема верна. Действительно, случай $k = 0$ по определению означает, что пути между X и Y отсутствуют. В случае, когда минимальное отделяющее X от Y множество состоит из одной вершины x , нам годится любой путь из X в Y , проходящий через x .

Доказательство теоремы в случае $k > 1$ проведем индукцией по количеству вершин и ребер в графе. В качестве базы индукции мы можем взять граф \bar{K}_2 , состоящий из двух изолированных вершин, в котором $X = Y = \bar{K}_2$ (рис.12,а). Размер минимального отделяющего X от Y множества равен двум (в качестве такого множества необходимо взять множество $X = Y$). Максимальное же количество путей, соединяющих X и Y , также равно двум — в качестве таких путей выступают тривиальные пути, состоящие из одной вершины. Таким образом, для данного случая доказываемая нами теорема верна.

Возьмем теперь некоторый граф $G \neq \bar{K}_2$, в котором существуют множества вершин X и Y , такие, что размер минимального отделяющего X от Y множества R равен $k > 1$. Докажем наше утверждение для G , X и Y при условии, что для всех графов с меньшим количеством вершин и/или ребер теорема 3.6 верна.

Рассмотрим вначале случай, когда в графе G существует вершина $z \in X \cap Y$ (см.рис.11). В графе $G - z$ минимальное отделяющее $X \setminus \{z\}$ от $Y \setminus \{z\}$ множество R' содержит $k - 1$ вершин. Тогда, по предположению индукции, в $G - z$ имеется $(k - 1)$ непересекающийся путь из $X \setminus \{z\}$ в $Y \setminus \{z\}$. Добавляя к этому набору тривиальный путь $\{z\}$, получаем набор из k непересекающихся путей в графе G .

Теперь разберем случай $X \cap Y = \emptyset$. Условие $k > 0$ означает, что X и Y соединены между собой хотя бы одним путем P . То, что $X \cap Y = \emptyset$, означает, что этот путь будет нетривиальным, то есть он будет содержать хотя бы одно ребро $e = \{x, y\}$. При этом, по определению пути между X и Y , вершина $x \notin Y$, а вершина $y \notin X$ даже в том случае, когда P состоит из единственного ребра e .

Предположим вначале, что при удалении ребра $e = \{x, y\}$ размер минимального отделяющего X от Y множества R' в графе $G - e$ не уменьшится по сравнению с размером разделяющего множества R в графе G (рис.12,б). Тогда, по индукционному предположению, в графе $G - e$ найдется k непересекающихся друг с другом путей из X в Y . Добавление же ребра e это количество путей уменьшить никак не сможет.

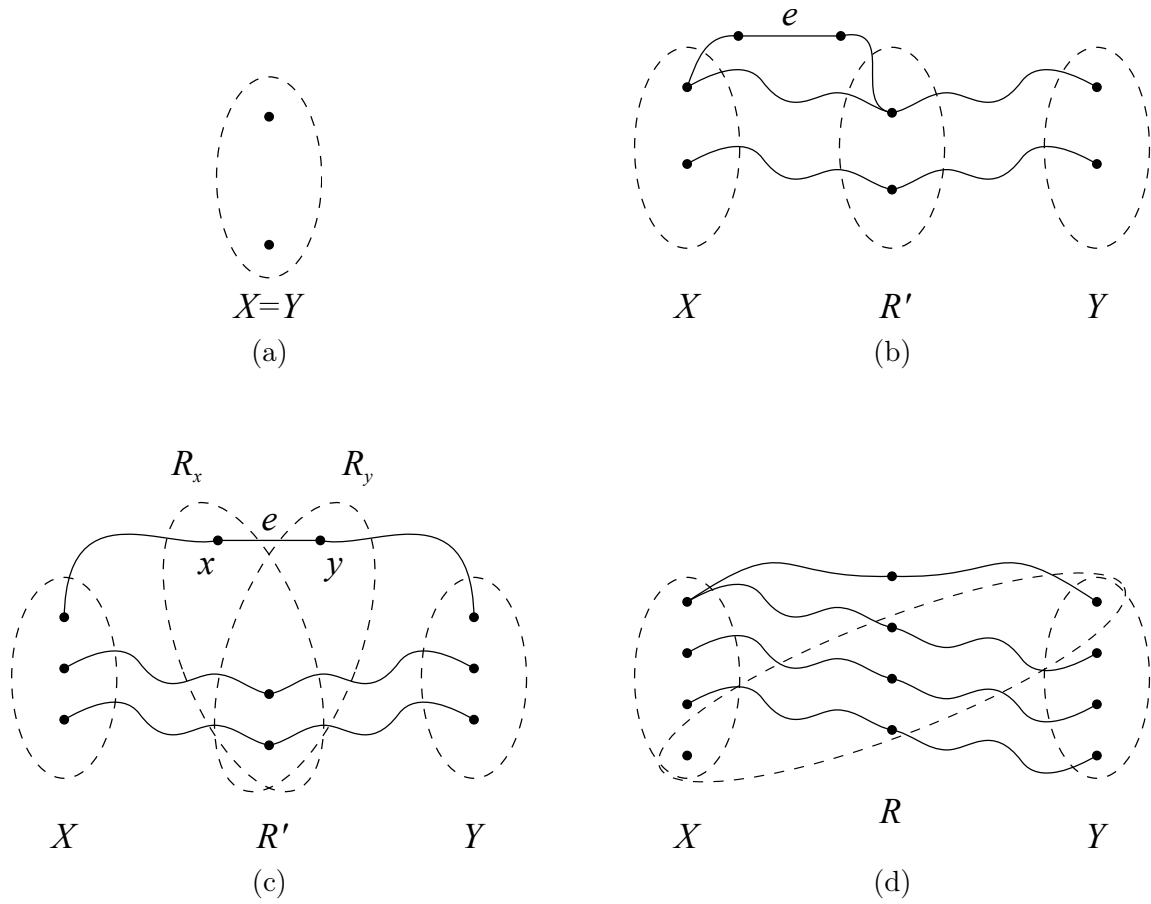


Рис. 12

Теперь предположим, что при удалении ребра $e = \{x, y\}$ размер отделяющего X от Y множества R' в графе $G - e$ уменьшился по сравнению с размером отделяющего X от Y множества R в графе G (рис.12,с) и стал равным $k - 1$. Это, в свою очередь, означает, что множества вершин $R_x = R' \cup \{x\}$ и $R_y = R' \cup \{y\}$ отделяют X от Y в графе G и содержат ровно k вершин. Кроме того, хотя бы одно из множеств R_x, R_y не совпадает ни с X , ни с Y . Действительно, в противном случае $R' = X \cap Y$, $|R'| = k - 1 \geq 1$, что противоречит условию $X \cap Y = \emptyset$. Иными словами, мы доказали, что в рассматриваемом случае в исходном графе G обязательно существует отделяющее X от Y множество R мощности k , не совпадающее ни с X , ни с Y (рис.12,d).

Обозначим через \bar{X} и \bar{Y} подмножества $X \setminus R$ и $Y \setminus R \neq \emptyset$ соответственно. Так как R отличен и от X , и от Y , то оба эти множества не пусты. Удалим в графе G все вершины множества \bar{Y} . Рассмотрим в получившемся графе G' множества X и R . Эти множества не совпадают, причем $|X| \geq k$, а $|R| = k$. Любое отделяющее X от R множество в графе G' , если оно существует, содержит не менее, чем k вершин — в противном случае мы бы и в исходном графе G смогли отделить X от Y , удалив эти вершины. Но тогда, по индукционному предположению, в графе G' существует k непересекающихся путей из X в R . Аналогично доказывается, что в графе $G'' = G - \bar{X}$ существует k непересекающихся путей из R в Y . Так как $|R| = k$, то мы всегда можем состыковать эти пути с ранее построенными путями из X в R и получить искомым набор путей, соединяющих X и Y в исходном графе G . \square

3.1.6. Теорема 3.6 была доказана Frank Göring в 2000 году с целью дать более короткое доказательство одной из наиболее фундаментальных теорем теории графов — теоремы Менгера.

Теорема 3.7 (Менгер, 1927). Пусть $x, y \in V(G)$ — две несмежные вершины графа G . Тогда количество $\kappa(x, y)$ вершин в наименьшем вершинном разделяющем x и y множестве R совпадает с наибольшим количеством простых путей из x в y , не имеющих общих внутренних вершин.

Доказательство. Действительно, пусть x, y — две несмежные вершины графа G , удовлетворяющие условиям теоремы Менгера. Рассмотрим множество X вершин, смежных с x , и множество Y вершин, смежных с y . Любое отделяющее X от Y множество разделяет вершины x и y и наоборот. Следовательно, размер минимального отделяющего X от Y множества совпадает с $\kappa(G)$. Но тогда, согласно теореме 3.6, существует k попарно непересекающихся путей из X в Y . Продолжая эти пути до точек x и y , мы тем самым доказываем справедливость теоремы Менгера. \square

3.1.7. Теорема Менгера описывает количество путей между произвольной парой несмежных вершин в графе, и потому называется локальной теоремой. Глобальная ее версия, доказанная Уитни в 1932 году, позволяет переформулировать определение k -связных графов на языке путей, соединяющих в графе произвольную пару вершин.

Теорема 3.8 (Уитни, 1932). Простой граф G является k -связным тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами x и y существует k путей, не имеющих общих внутренних вершин.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно — если между любыми двумя вершинами простого графа существует k не имеющих общих внутренних вершин путей, то количество вершин в графе больше k , и в нем не существует разделяющего множества, содержащего менее, чем k вершин. Поэтому такой граф k -связен.

Теперь предположим, что граф G является k -связным. Если вершины x и y несмежны, то существование k путей между ними сразу следует из теоремы Менгера. Поэтому далее будем рассматривать случай, когда в графе G существует ребро $e = \{x, y\}$.

Пусть в графе $G - e$ наибольшее количество путей из x в y , не имеющих общих внутренних вершин, меньше, чем $(k - 1)$. Из теоремы Менгера следует, что в таком случае в графе $G - e$ существует разделяющее x и y множество R , мощность которого меньше или равна $(k - 2)$. В любом k -связном графе имеется как минимум $(k + 1)$ вершина, поэтому в графе G наряду с x, y и вершинами множества R существует еще хотя бы одна вершина z . Множество R отделяет эту вершину z в графе $G - e$ от одной из вершин x или y . Действительно, если бы это было не так, то после удаления R в графе $G - R$ нашелся бы путь из x в z и путь из z в y , что невозможно. Предположим для определенности, что z отделено R от y . Тогда рассмотрим в исходном графе G множество $R \cup \{x\}$, $|R \cup \{x\}| = (k - 1)$. Такое множество по прежнему разделяет вершины z и y , а это невозможно, так как по определению k -связного графа G , любое разделяющее пару вершин множество должно иметь мощность, большую или равную k . \square

Паросочетания в графах

4 Понятие паросочетания. Теорема Бержа

4.1. Понятие паросочетания является одним из наиболее важных понятий теории графов. Оно встречается в огромном количестве прикладных задач [?].

4.1.1. Начнем, как всегда, с определения данного понятия.

Определение 4.1. Паросочетанием M в произвольном графе G называется любой набор ребер, не имеющих общих концевых вершин.

Замечание 4.2. Из определения видно, что при изучении паросочетаний нас будут интересовать только лишь простые графы. Действительно, любая петля в мультиграфе соединяет вершину саму с собой, и поэтому по определению не может входить ни в какое из паросочетаний. Далее, если одно из ребер мультиграфа, соединяющего пару вершин графа, входит в паросочетание M , то остальные ребра, соединяющие ту же пару вершин, в паросочетание M по определению войти не могут. Поэтому и мультиребра в графе также рассматривать смысла не имеет.

Пример 4.3. Любое одиночное ребро e в (простом) графе $G \neq \bar{K}_n$ является простейшим примером паросочетания.

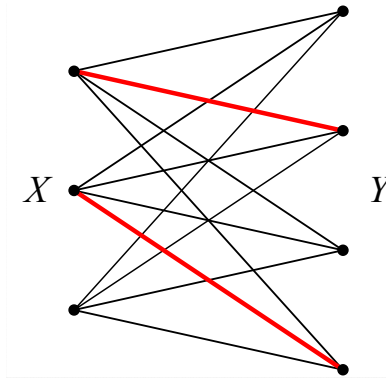


Рис. 13

Пример 4.4. На рис.13 показан чуть менее тривиальный пример паросочетания M в полном двудольном графе $K_{3,4}$ (ребра, помеченные красным цветом на рисунке). Это паросочетание состоит из двух ребер и соединяет (или, как говорят, покрывает) четыре вершины этого графа.

Определение 4.5. Говорят, что вершина $x \in V(G)$ покрыта паросочетанием M , если она является концом одного из ребер e , входящего в паросочетание M .

4.1.2. На практике нам, как правило, хочется покрыть паросочетанием как можно большее количество вершин в графе G . Например, мы можем захотеть для выполнения какого-то задания разбить всех студентов в группе на пары так, чтобы студенты внутри каждой пары имели опыт работы друг с другом. В этом примере все множество студентов можно рассматривать как множество $V(G)$ вершин графа G . Ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если

соответствующие этим вершинам студенты имели до этого момента опыт совместной работы. Понятно, что если граф $G \neq \bar{K}_n$, то хотя бы одну такую пару студентов мы как-то сможем найти. Однако нам хотелось бы разбить на пары как можно большее количество студентов, в идеале — всех. На языке теории графов такое идеальное для нас разбиение носит название совершенного паросочетания.

Определение 4.6. Паросочетание M называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа G .

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис.14,а. Красным цветом на этом рисунке помечены ребра, образующие паросочетание в представленном графе. Так как эти ребра покрывают все десять вершин графа G , то такое паросочетание является совершенным.

4.1.3. Далеко не все графы имеют совершенное паросочетание. Так, очевидно, что любое паросочетание M покрывает четное количество вершин в графе G . Поэтому любой граф, построенный на нечетном количестве вершин, совершенного паросочетания не имеет. Для графов, у которых совершенные паросочетания отсутствуют, полезно ввести понятие максимального паросочетания.

Определение 4.7. *Максимальным паросочетанием* (maximum matching) в графе G называется паросочетание M , размер которого (то есть количество входящих в него ребер) является наибольшим среди всех паросочетаний в графе G . Количество ребер $|M|$ в таком паросочетании M обозначается обычно через $\alpha'(G)$.

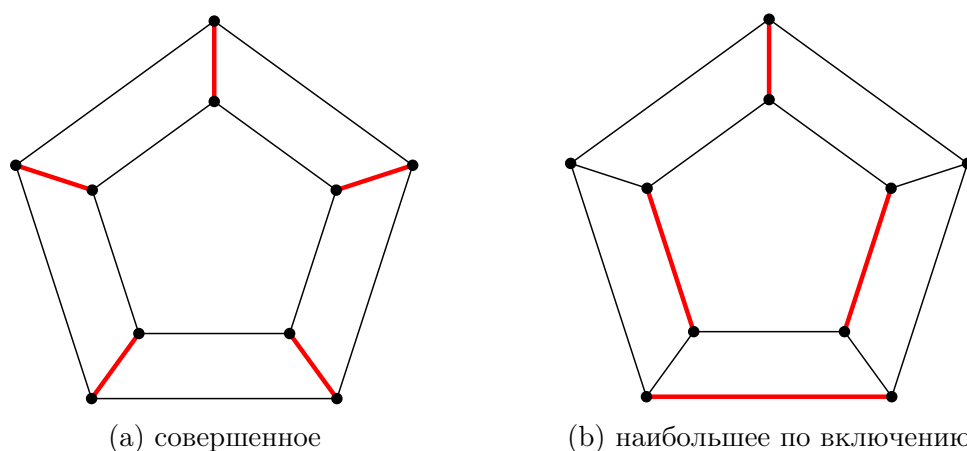


Рис. 14: Паросочетания

4.1.4. Казалось бы, для построения максимального паросочетания в графе можно использовать жадный алгоритм, добавляя случайным образом к M ребра графа до тех пор, пока это возможно. Полученное паросочетание, однако, максимальным может и не оказаться.

В качестве примера на рис.14,б показано паросочетание M , полученное в результате работы некоторого жадного алгоритма. Оно является *наибольшим по включению* (maximal matching) в том смысле, что добавление к нему любого другого ребра из множества $E(G)$ уже невозможно. Однако количество ребер в M строго меньше $\alpha'(G) = 5$. Максимальное (и одновременно совершенное) паросочетание для такого графа показано на рис.14,а.

4.2. Итак, мы убедились на приведенном выше примере, что жадный алгоритм дает нам не максимальное, а так называемое *наибольшее по включению* паросочетание. Такое паросочетание иногда может оказаться максимальным, а иногда может таковым и не быть. В принципе,

эти соображения могли бы нам позволить построить алгоритм поиска максимального паросочетания в графе, если бы в дополнении к жадному алгоритму у нас был бы некоторый критерий проверки того или иного графа на максимальность.

4.2.1. Действительно, если бы такой критерий существовал, то мы могли бы для произвольного графа G запускать жадный алгоритм, получать с его помощью наибольшее по включению паросочетание, а затем с помощью этого критерия проверять полученное паросочетание на максимальность. В случае, если паросочетание оказывается максимальным, мы останавливаемся. В противном случае мы вновь запускаем жадный алгоритм.

4.2.2. Итак, для реализации описанного выше подхода нам необходим критерий максимальной паросочетания. Для того, чтобы этот критерий сформулировать, нам понадобятся следующие полезные понятия.

Определение 4.8. Пусть M есть некоторое паросочетание в графе G . Произвольный путь P в графе G , в котором чередуются ребра, входящие в M , и ребра, в M не входящие, называется M -чередующимся (рис.15,а). M -чередующийся путь, оба конца которого не покрыты паросочетанием M , называется M -дополняющим путем (рис.15,б).

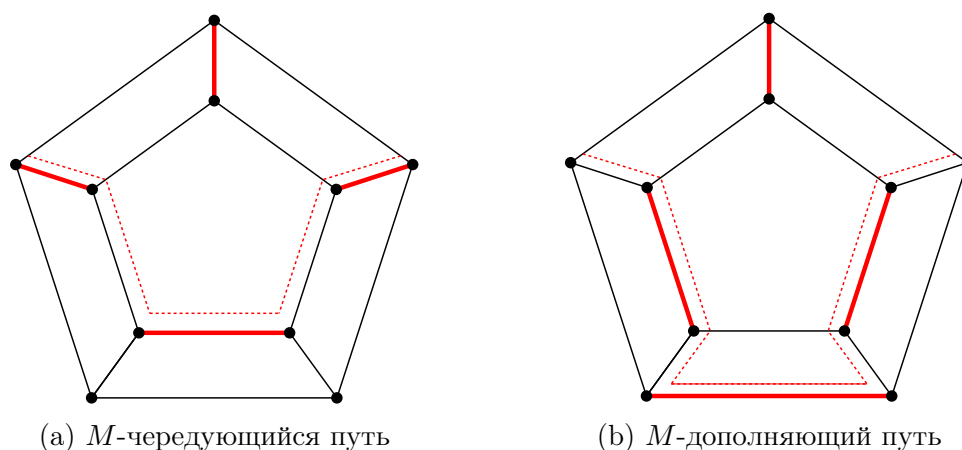


Рис. 15

Посмотрим теперь повнимательнее на рис.15,б. Заметим, что в M -дополняющем пути P (помеченном пунктирной ломаной на рис.15,б) количество ребер, покрытых паросочетанием M , на единицу меньше количества ребер в P , этим паросочетанием не покрытых. Исключим теперь из паросочетания M ребра, входящие в P , и добавим к M ребра этого пути, изначально паросочетанием не покрытые (процесс, известный в англоязычной литературе как *matching augmentation*). В результате мы получим некоторое новое паросочетание M' , содержащее на единицу большее количество ребер по сравнению с исходным паросочетанием M . Одновременно с этим у нас увеличится количество вершин, покрытых паросочетанием M' . Иными словами, мы показали, что наличие в графе G для заданного паросочетания M -дополняющего пути является признаком того, что паросочетание M максимальным не является.

4.2.3. В 1957 году французский математик Claude Berge доказал, что условие отсутствия для заданного паросочетания M в графе M -дополняющего пути является не только необходимым, но и достаточным условием максимальной паросочетания M . Именно, справедлива

Теорема 4.9 (Berge, 1957). *Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда в таком графе M -дополняющие пути отсутствуют.*

Доказательство. Необходимость этого условия мы уже проверили — мы доказали, что если в графе существует M -дополняющий путь, то паросочетание M максимальным не является. Нам осталось доказать достаточность этого условия. Именно, предположим, что M не является максимальным паросочетанием в графе G . Покажем, что тогда в графе G обязательно найдется M -дополняющий путь.

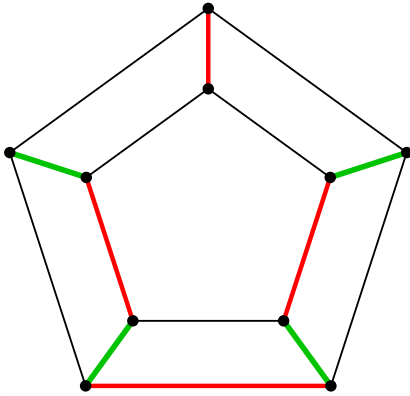


Рис. 16

Обозначим через M' максимальное паросочетание в G (зеленые ребра на рис.16). Так как паросочетание M максимальным не является, то $|M'| > |M|$. Рассмотрим симметрическую разность $F := M \Delta M'$ этих двух паросочетаний. Так как любая вершина $x \in V(G)$ может быть инцидентна максимум одному ребру из M и максимум одному ребру из M' , то степень любой такой вершины в подграфе H , индуцированном подмножеством ребер F , не превосходит двух. Следовательно, любая компонента связности подграфа H представляет собой путь или цикл, в котором чередуются ребра из M и из M' .

В случае цикла чередование ребер из M и M' , в частности, означает, что любой цикл в H имеет четную длину, а значит, количество ребер из M и M' в любом из циклов одинаково. Следовательно, условие $|M'| > |M|$ означает, что в графе H обязан существовать путь, начальное и конечное ребра которого принадлежат M' . Начальная и конечная вершины такого пути покрыты M' , а значит, не покрыты M . Поэтому данный путь представляет собой M -дополняющий путь в G . □

4.3. Используя теорему Бержа, можно построить достаточно эффективные алгоритмы нахождения максимального паросочетания — как в двудольном графе (так называемый алгоритм Куна), так и в произвольном графе (алгоритм Эдмондса).

4.3.1. Начнем с описания алгоритма Куна, позволяющего найти максимальное паросочетание в двудольном графе $G[X, Y]$, $|X| \leq |Y|$, за время $O(n^3)$. В качестве первого шага данного алгоритма мы можем построить в графе $G[X, Y]$ произвольное паросочетание M (см.рис.17,а). Для этого мы можем, например, перебрать все вершины $x_i \in X$ и добавить к M ребро $\{x_i, y_j\}$ в случае, если вершина y_j еще не покрыта паросочетанием M (смотри ребра, помеченные красным цветом на рис.17,а). Если при этом все вершины x_i оказались покрытыми паросочетанием M , то мы на этом работу алгоритма прекращаем.

В противном случае мы выбираем произвольную вершину $x \in X$, еще не покрытую паросочетанием M , и запускаем из x поиск в глубину, строя из этой вершины M -чередующиеся пути (см.рис.17,б). В случае, если хотя бы один из строящихся путей P в какой-то момент окажется M -дополняющим (путь $P = (x, y)$ на рис.17,б), мы останавливаем поиск в глубину, меняем

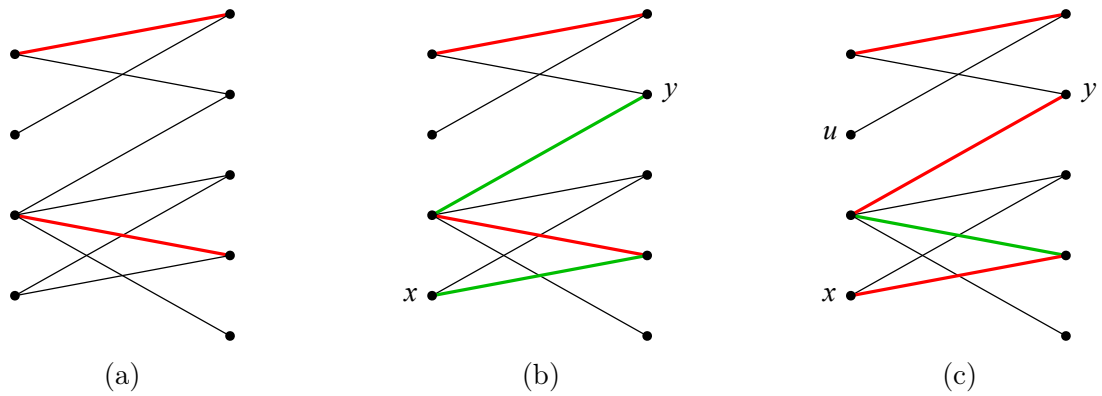


Рис. 17

ребра этого пути, покрытые M , на непокрытые M (то есть вместо M рассматриваем паросочетание $M' = M \Delta E(P)$), и добавляем их в строящееся паросочетание (рис.17,с). Обойдя так все вершины $x_i \in X$, мы построим в графе $G[X, Y]$ максимальное паросочетание.

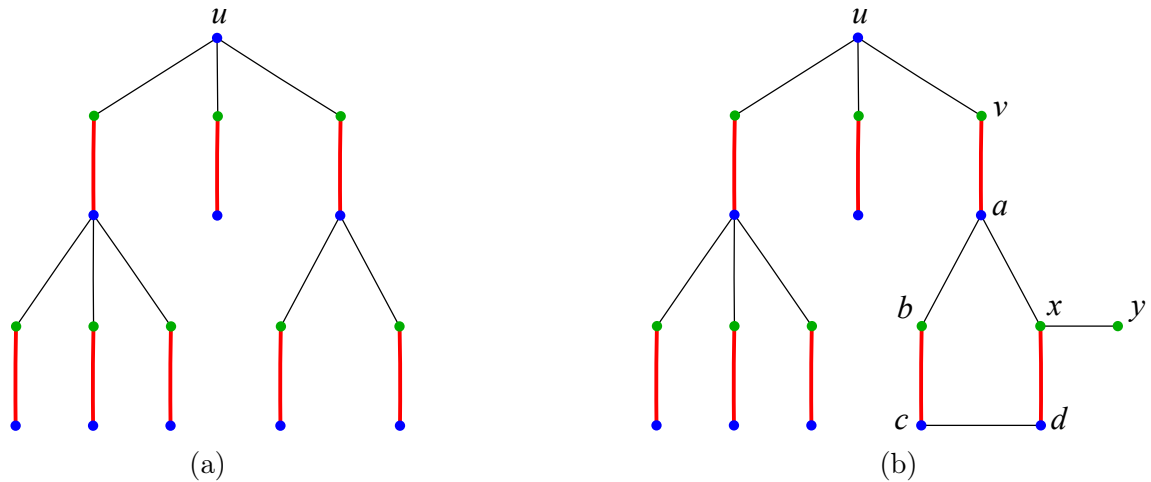


Рис. 18

4.3.2. Предположим теперь, что при реализации алгоритма Куна мы нашли вершину u , такую, что среди всех M -чередующихся путей, исходящих из u , ни один не является M -дополняющим (см.рис.17,с). Такую вершину нам паросочетанием M не покрыть. При этом все исходящие из u пути образуют так называемое M -чередующееся u -дерево (см.рис.18,а, на котором приведен чуть более общий вид такого дерева). Особенность этого дерева состоит в том, что количество синих вершин (вершин, принадлежащих доли X двудольного графа $G[X, Y]$), на единицу больше количества зеленых вершин (вершин $y \in Y$). Кроме того, из зеленых вершин вниз отходит ровно по одному ребру (красные ребра на рис.18,а), принадлежащему паросочетанию M . Из синих вершин может исходить, в принципе, произвольное количество ребер.

В случае произвольного, не обязательно двудольного графа G ситуация становится сложнее (рис.18,б). Так как в таком графе могут возникать циклы нечетной длины, то обход в глубину или в ширину может M -дополняющий путь не найти. Рассмотрим, к примеру, граф, показанный на рис.18,б. В таком графе существует M -дополняющий путь $P = (u, v, a, b, c, d, x, y)$. Если алгоритм поиска в глубину из вершины a пойдет в вершину b , то он этот путь найдет. Однако, если алгоритм поиска в глубину, дойдя по пути (u, v, a) до вершины a , пройдет затем в вершины x и d , то он указанный выше M -дополняющий путь P уже не найдет. Иными словами, в случае

произвольного графа G проблема состоит в том, что при попадании в цикл нечетной длины алгоритм поиска в глубину может пойти по циклу в неправильном направлении.

4.3.3. Эдмондс (Edmonds, 1965) предложил алгоритм поиска максимального паросочетания в произвольном графе G (так называемый blossom algorithm), который позволяет обойти описанные выше сложности.

Определение 4.10. Пусть u есть вершина, не покрытая паросочетанием M . Цветком (blossom) в графе G называется объединение двух M -чередующихся путей из u в x , имеющих разную четность (пути (u, v, a, x) и (u, v, a, b, c, d, x) на рис.18,b). Наибольший общий участок этих двух путей, имеющий четную длину (участок (u, v, a) на рис.18,b), называется стеблем (stem). Конечная вершина стебля (вершина a на рис.??,b), называется базой (base). К базе примыкает цикл нечетной длины (цикл (a, b, c, d, x, a) на рис.??,b), состоящий из $2k + 1$ ребра, k из которых покрыты паросочетанием M , называемый в английской литературе blossom B . База a представляет собой единственную вершину цикла B , не покрытую ребрами паросочетания M .

Идея, лежащая в основе алгоритма Эдмондса, состоит в процедуре, известной под названием процедуры сжатия цветка (blossom shrinking). На каждом шаге этой процедуры мы заменяем цикл нечетной длины B (blossom) на одну псевдовершину B (сжимаем цветок). При этом все внешние ребра, исходящие из цикла нечетной длины, становятся инцидентными псевдовершине B . После сжатия очередного цветка мы пытаемся продолжить данный процесс, стартуя с псевдовершины B . Если у нас в результате сжатия появился еще один цикл C нечетной длины, содержащий псевдовершину B , мы вновь сжимаем его в новую псевдовершину C и так далее. Как только мы находим в процессе этих действий M -дополняющий путь, соединяющий u с вершиной y , не покрытой M , мы разворачиваем все сжатые циклы обратно, выбирая в каждом цикле из двух возможных путей тот, который не нарушит M -чередующесть восстанавливаемого пути.

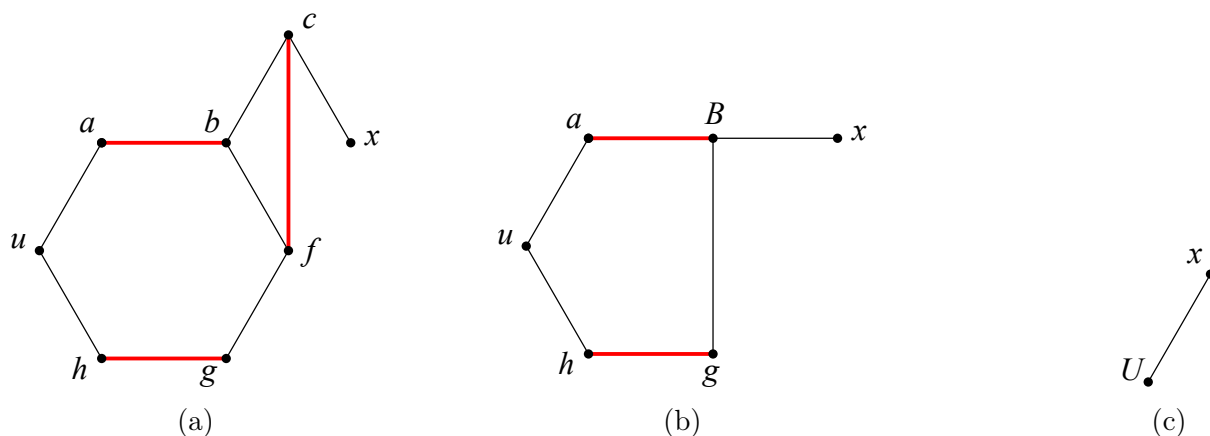


Рис. 19

4.3.4. В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис.19,a. Красным цветом на этом рисунке помечены ребра, входящие в некоторое паросочетание M . Вершина u не покрыта этим паросочетанием. Если мы пройдем из u вдоль пути (u, a, b) , мы обнаружим, что этот путь является стеблем цветка, образованного объединением путей (u, a, b, f, c) и (u, a, b, c) , а вершина b является его базой. Сжимая цикл (b, c, f) нечетной длины в одну псевдовершину B , мы получим граф G' , показанный на рис.19,b. В таком графе, в свою очередь, имеется цветок, состоящий из тривиального стебля u , а также цикла (u, a, B, g, h) нечетной длины.

Сжимая этот цикл в псевдовершину U , мы получаем граф G'' , изображенный на рис.19,с. В этом графе у нас имеется M -дополняющий путь (U, x) . Разворачивая затем цветок, соответствующий псевдовершине U , и выбирая в образовавшемся цикле сегмент (u, a, B, x) , мы получаем в графе G' M -дополняющий путь (u, a, B, x) . Наконец, разворачивая в G' псевдовершину B и выбирая в цикле (b, f, c) сегмент (b, f, c) , мы в исходном графе G обнаруживаем M -дополняющий путь (u, a, b, f, c, x) .

5 Независимые множества и покрытия графа

5.1. Напомним, что под паросочетанием мы понимаем любой набор ребер в графе, не имеющих общих концевых вершин. Иногда паросочетание в графе еще называется *реберно независимым множеством*. Последнее название обычно используется как реберная аналогия еще одного важного понятия — *вершинно независимого множества*, к изучению которого мы сейчас и перейдем.

5.1.1. Начнем с определения вершинно независимого множества (vertex independent set) графа G .

Определение 5.1. *Вершинно независимым* (или просто *независимым*) *множеством* в графе G называется любой набор S попарно несмежных между собой вершин.

Довольно очевидно, что, выбирая произвольную вершину x в нетривиальном графе G , мы получаем некоторое независимое множество $S = \{x\}$. Нам, однако, часто хочется понять, каков может быть максимальный размер независимого множества S .

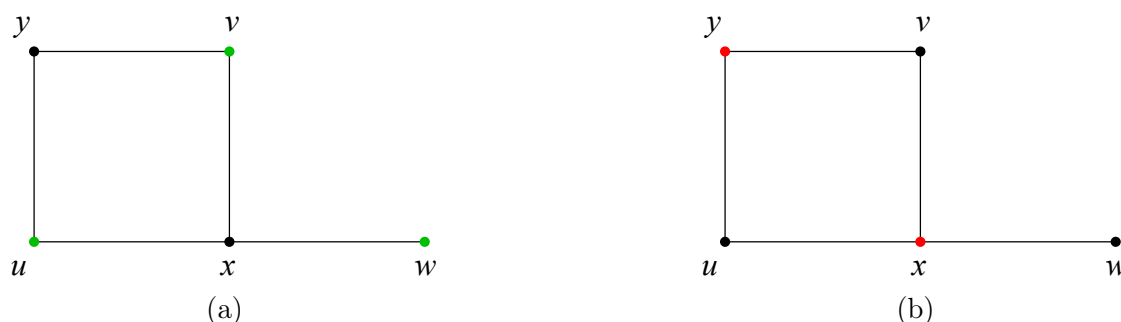


Рис. 20

Рассмотрим, к примеру, граф G , изображенный на рис.20,а. Любая вершина такого графа является независимым множеством в G . Независимое же множество S максимального размера состоит из попарно несмежных между собой вершин u, v и w .

Определение 5.2. Независимое множество S называется *максимальным*, если количество $|S'|$ вершин в любом другом независимом множестве S' меньше или равно $|S|$. Количество вершин в максимальном независимом множестве графа G иногда называется *числом независимости* (independence number) и обозначается через $\alpha(G)$.

Таким образом, для графа G , показанного на рис.20,а, число независимости $\alpha(G) = 3$.

По аналогии, количество ребер в максимальном паросочетании, то есть количество ребер в максимальном реберно независимом множестве, обозначается через $\alpha'(G)$.

5.1.2. Первый алгоритм, который приходит в голову для поиска максимального независимого множества, состоит, по всей видимости, в следующем. В начальный момент времени полагаем независимое множество $S = \emptyset$. Выбираем в множестве вершин случайным образом некоторую вершину x графа G , добавляем ее в S и удаляем из множества $V(G)$ вершину x вместе со всеми смежными с ней вершинами. Затем в оставшемся множестве вершин вновь выбираем случайную вершину y и повторяем для нее те же действия. Алгоритм завершается тогда, когда все множество вершин окажется исчерпанным.

Несложно, однако, убедиться в том, что описанный выше жадный алгоритм вместо максимального дает нам так называемое наибольшее по включению независимое множество.

Определение 5.3. Вершинно независимое множество S называется *наибольшим по включению*, если при добавлении к нему любой другой вершины x графа G множество $S \cup \{x\}$ перестает быть независимым.

В качестве примера выберем для показанного на рис.20 графа G в качестве начальной вершины описанного выше алгоритма вершину x (рис.20,b). Удаляя смежные с ней вершины u, v и w , мы в результате работы алгоритма получаем независимое наибольшее по включению множество $K = \{x, y\}$ вершин, не являющееся максимальным. Несложная оптимизация этого алгоритма, заключающаяся в выборе на каждом шаге вершины с минимально возможной степенью, также не гарантирует получения максимального независимого множества.

В семидесятые годы прошлого века было показано, что задача поиска максимального независимого множества (independent set problem) NP -трудна. Задача же о наличии независимого множества, состоящая в проверке того, что для заданного графа G и натурального числа k существует независимое множество размером k , является NP -сложной задачей.

Замечание 5.4. Если исходный граф является деревом, то задача поиска максимального независимого множества может быть решена за линейное время с помощью метода динамического программирования [?].



Рис. 21

Замечание 5.5. Любому независимому множеству вершин в графе G отвечает некоторая клика в дополнении \bar{G} к графу G (см.рис.21). Как следствие, задача поиска максимального независимого множества эквивалентна так называемой задаче о клике — то есть задаче нахождения в заданном графе клики наибольшего размера. Данная задача часто возникает в социологии при

изучении в некотором сообществе подгруппы людей, каждый человек в которой знает любого другого члена этой подгруппы. Количество вершин в клике максимального размера обозначается обычно через $\omega(G)$. Мы показали, таким образом, что

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}).$$

5.1.3. Наряду с вершинно независимым множеством в теории графов часто используется и двойственное к нему понятие *вершинного покрытия* (vertex cover) графа G .

Определение 5.6. Подмножество K множества $V(G)$ вершин графа G называется *вершинным покрытием* (или просто *покрытием*) этого графа, если любое ребро $e \in E(G)$ графа G инцидентно по меньшей мере одной вершине подмножества K .

Тривиальным примером вершинного покрытия является все множество $V(G)$ вершин графа G . Нас, как обычно, будут интересовать подмножества минимального размера.

Определение 5.7. Покрытие K графа G называется *минимальным*, если любое другое покрытие K' имеет размер $|K'|$, больший или равный $|K|$. Количество вершин в минимальном вершинном покрытии обозначается через $\beta(G)$.

Так, для графа, изображенного на рис.20,b, минимальное покрытие K состоит из вершин x и y . Как следствие, размер $\beta(G)$ такого покрытия равен двум.

Для нахождения минимального вершинного покрытия мы, в принципе, можем взять в качестве начального все множество $V(G)$ вершин графа и удалять из него вершины до тех пор, пока у нас будет выполняться условие “любое ребро инцидентно хотя бы одной вершине подмножества K ”. Однако то, что у нас получится в результате, будет не минимальным, а так называемым *наименьшим по включению вершинным покрытием*. Таковым, к примеру, является подмножество $S = \{u, v, w\}$ вершин графа, изображенного на рис.20,a. Как мы уже убедились, такое вершинное покрытие минимальным не является.

5.1.4. Интуитивно ясно, что понятия независимого множества и покрытия довольно тесно связаны между собой. Именно, справедлива следующая

Теорема 5.8. *Подмножество S множества $V(G)$ вершин графа G является независимым тогда и только тогда, когда подмножество $K = V(G) \setminus S$ образует вершинное покрытие графа G .*

Доказательство. По определению, S является независимым в случае, когда никакие две вершины из S не соединены ребром. Иными словами, если один из двух концов некоторого ребра $e \in E(G)$ входит в вершину подмножества S , то второй конец этого ребра обязан входить в вершину, принадлежащую $K = V(G) \setminus S$. Если же ребро e не является инцидентным ни одной вершине подмножества S , то оно тем более обязано быть инцидентным каким-то вершинам множества K . Иными словами, любое ребро графа G обязано быть инцидентным хотя бы одной вершине множества K . Но это и означает, что K образует вершинное покрытие графа G . \square

Следствие 5.9. *Для любого графа G справедливо равенство*

$$\alpha(G) + \beta(G) = n = |V(G)|. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть S , $|S| = \alpha(G)$, есть максимальное независимое множество графа G . По теореме (5.8), $V(G) \setminus S$ образует вершинное покрытие G , а значит,

$$|V(G) \setminus S| = n - \alpha(G) \geq \beta(G).$$

Аналогично, пусть K , $|K| = \beta(G)$, есть минимальное вершинное покрытие графа G . По теореме (5.8), $V(G) \setminus K$ представляет собой независимое множество графа G , и потому

$$|V(G) \setminus K| = n - \beta(G) \leq \alpha(G) \iff n - \alpha(G) \leq \beta(G).$$

Из полученных неравенств следует, что $\alpha(G) + \beta(G) = n$. □

5.2. Итак, мы ввели понятия вершинно независимого множества и реберно независимого множества. Имеется у нас также и вершинное покрытие графа — набор вершин, покрывающих все ребра графа. Логично предположить, что должен существовать и реберный аналог вершинного покрытия — *реберное покрытие* графа G .

Определение 5.10. *Реберным покрытием* графа G называется подмножество L множества $E(G)$ всех ребер графа, покрывающее все вершины этого графа. Иными словами, любая вершина графа инцидентна одному из ребер, входящих в подмножество L .

К изучению реберных покрытий графа мы сейчас и перейдем.

5.2.1. Как видно из определения, реберное покрытие в графе существует лишь тогда, когда в G отсутствуют изолированные вершины. Другими словами, реберное покрытие существует в случае, когда минимальная степень $\delta(G)$ вершин в графе G строго больше нуля.

Понятно, что все множество $E(G)$ ребер в графе G с $\delta(G) > 0$ является реберным покрытием графа G . Нас, как обычно, будет интересовать минимальный набор ребер, покрывающий все вершины графа.

Определение 5.11. Реберное покрытие L графа G называется *минимальным*, если размер любого другого реберного покрытия L' графа G больше или равен $|L|$. Размер минимального реберного покрытия графа G обозначается обычно через $\beta'(G)$.

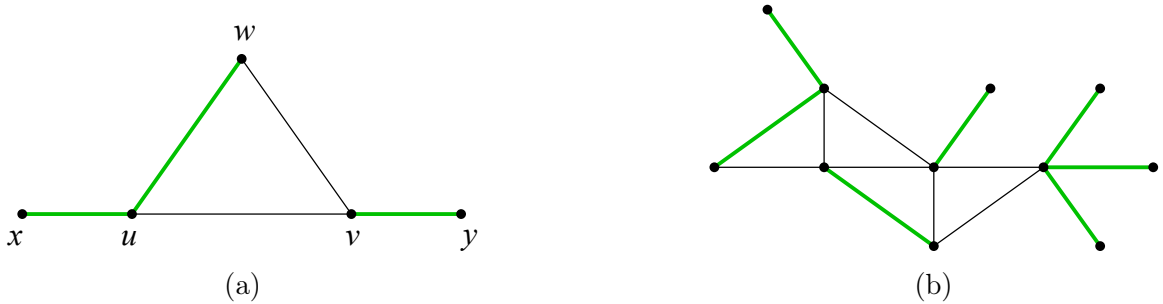


Рис. 22

Рассмотрим в качестве примера граф, показанный на рис.22,а. Минимальное реберное покрытие такого графа состоит из трех ребер, помеченных зеленым цветом на рисунке. Действительно, ребра $\{x, u\}$ и $\{v, y\}$ нам необходимы, чтобы покрыть два листа нашего графа — вершины x и y . При этом остается непокрытой вершина w , которую можно покрыть, к примеру, ребром $\{u, w\}$. Таким образом, для этого графа $\beta'(G) = 3$.

На рис.22,b показан чуть более сложный граф G . Утверждается, что размер $\beta'(G)$ минимального реберного покрытия такого графа равен семи. Действительно, пять ребер нужны нам для того, чтобы покрыть пять листьев графа G . Минимальное количество ребер, покрывающих оставшиеся три вершины, равно двум.

5.2.2. Давайте теперь посмотрим на подграф $H = (V(G), L)$, индуцированный ребрами минимального реберного покрытия L . Нас интересует структура этого подграфа.

Как видно из рис.22,b, подграф H состоит из нескольких связных компонент, каждая из которых представляет собой некоторое дерево. Оказывается, что это дерево имеет специальный вид, а именно, представляет собой *звезду* — дерево, в котором лишь одна вершина может иметь степень, большую единицы (рис.23,a). Докажем все эти утверждения строго.



Рис. 23

Лемма 5.12. *Граф $H = (V(G), L)$ представляет собой объединение связных компонент, каждая из которых представляет собой звезду.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в H циклов быть не должно — в противном случае мы бы могли всегда разорвать цикл, убрав одно из ребер $e \in C$, не нарушив при этом покрытие вершин $V(C)$ оставшимися ребрами. Следовательно, H представляет собой остовное дерево графа G .

Теперь предположим, что в остовном подграфе H у нас нашлось ребро e , обе инцидентные вершины которого имеют степени, большие единицы (см.рис.23,b). В этом случае мы всегда такое ребро можем удалить, не нарушив покрытия ребрами остовного подграфа $H - e$ всех вершин графа G . Продолжая описанный процесс до тех пор, пока у нас не останется подобных ребер, мы получим лес, каждая связная компонента которого представляет собой звезду. \square

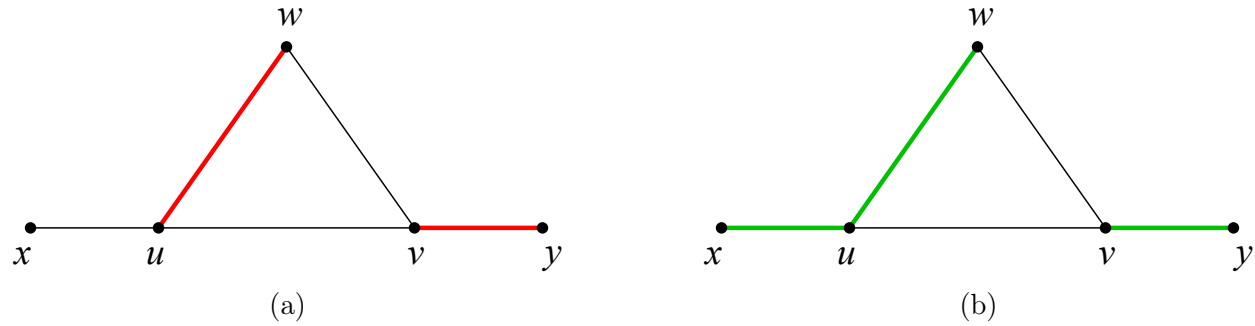


Рис. 24

5.2.3. В случае вершинного покрытия и вершинно независимого множества мы говорили, что дополнение к любому вершинному покрытию обязано являться вершинно независимым множеством и наоборот. Несложно убедиться, что в случае ребер аналогичный факт места не имеет.

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис.24. Набор ребер $\{u, w\}, \{v, y\}$ образует паросочетание, то есть представляет собой реберно независимое множество (красные ребра на рис.24,а), однако его дополнение — набор ребер $\{x, y\}, \{u, v\}$ и $\{v, w\}$ — реберным покрытием G не является (вершина y остается непокрытой этим набором). Обратное, набор ребер $\{x, u\}, \{u, w\}$ и $\{v, y\}$ образует реберное покрытие графа G (зеленые ребра на рис.24,б), однако дополнение к нему — набор ребер $\{u, v\}$ и $\{v, w\}$ — паросочетания в графе G не образует.

Несмотря на это, числа $\alpha'(G)$ и $\beta'(G)$ связаны между собой — оказывается, сумма этих чисел равна количеству $|V(G)|$ вершин графа G .

Теорема 5.13 (Gallai, 1959). *Для любого графа G с $\delta(G) > 0$ справедливо равенство*

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n, \tag{2}$$

где $n = |V(G)|$ — количество вершин в графе G .

Доказательство. Пусть M есть некоторое максимальное паросочетание в графе G , $|M| = \alpha'(G)$ (красные ребра на рис.24,а). Так как каждое ребро паросочетания покрывает две различные вершины графа G , то общее количество вершин, покрытых паросочетанием M , равно $2|M| = 2\alpha'(G)$.

Обозначим через U подмножество множества $V(G)$ вершин графа G , не покрытых этим паросочетанием (вершина x на рис.24,а). Размер этого подмножества равен, очевидно, $n - 2\alpha'(G)$, где $n = |V(G)|$. Так как $\delta(G) > 0$, то из каждой вершины подмножества U исходит хотя бы одно ребро (ребро $\{x, u\}$ на рис.24,а). Выберем тогда по одному ребру, исходящему из каждой вершины подмножества U , и сформируем из них подмножество F множества $E(G)$ ребер графа G . Размер подмножества F совпадает с размером подмножества U и равен $n - 2\alpha'(G)$.

Заметим теперь, что подмножество $M \cup F$ множества $E(G)$ ребер графа G покрывает все вершины нашего графа. Подсчитаем количество ребер, входящих в подмножество $M \cup F$:

$$|M \cup F| = |M| + |F| = \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G) = n - \alpha'(G).$$

Размер подмножества $M \cup F$, как и размер любого реберного покрытия, больше или равен размеру $\beta'(G)$ минимального реберного покрытия L графа G , поэтому

$$n - \alpha'(G) \geq \beta'(G) \implies n \geq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать обратное неравенство.

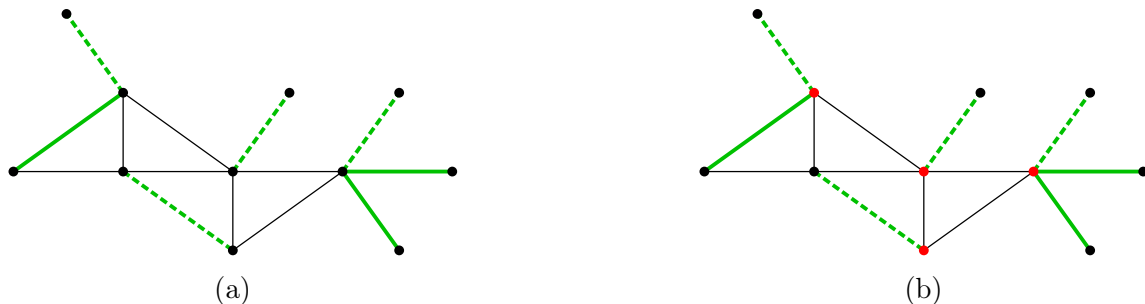


Рис. 25

Для этого рассмотрим некоторое минимальное реберное покрытие L графа G , $|L| = \beta'(G)$ (зеленые ребра на рис.25,а). Мы знаем, что любая компонента связности остовного подграфа H ,

построенного на ребрах подмножества L , представляет собой звезду. Давайте теперь построим в остовном подграфе $H = (V(G), L)$ максимальное паросочетание M (красные ребра на рис.25,а). Так как в графе “звезда” максимальное паросочетание в звезде состоит из единственного ребра, соединяющего центр звезды с одной из концевых ее вершин, то любая компонента связности остовного подграфа H покрывается только лишь одним ребром из M . Следовательно, размер $|M|$ паросочетания M совпадает с количеством центров звезд (розовые вершины на рис.25,б), а значит, и с количеством компонент связности остовного подграфа H .

Теперь заметим, что количество концевых вершин каждой звезды в точности совпадает с общим количеством ребер в звезде. Следовательно, количество вершин, не являющихся центрами звезд (черные вершины на рис.25,б), равно общему количеству $|L| = \beta'(G)$ ребер в минимальном реберном покрытии графа G (зеленые ребра на рис.25,б). Общее же количество $n = |V(G)|$ вершин в графе G , таким образом, равно

$$n = |M| + |L| = |M| + \beta'(G).$$

Но M — это некоторое паросочетание не только в графе H , но и в исходном графе G , поэтому его размер меньше или равен размеру $\alpha'(G)$ максимального паросочетания в графе G . Следовательно,

$$n = |M| + \beta'(G) \leq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Сравнивая это неравенство с доказанным выше неравенством $n \geq \alpha'(G) + \beta'(G)$, мы и получаем требуемый результат. \square

5.3. Вернемся к задаче поиска минимального вершинного покрытия в графе G . Заметим, что в общем случае количество ребер в любом (в том числе максимальном) паросочетании не превосходит количества вершин в любом (в том числе и в минимальном) вершинном покрытии. Действительно, для того, чтобы покрыть произвольное ребро e , входящее в паросочетание M , нам понадобится хотя бы одна вершина нашего вершинного покрытия. Отсюда, в частности, следует справедливость неравенства

$$\alpha'(G) \leq \beta(G). \quad (3)$$

для произвольного графа G .

5.3.1. В некоторых случаях неравенство (3) можно использовать для доказательства максимальности некоторого паросочетания M и минимальности некоторого вершинного покрытия. Действительно, существование в графе G паросочетания, размер которого совпадает с размером какого-то вершинного покрытия, является доказательством того, что рассматриваемые паросочетание и вершинное покрытие являются оптимальными.

В качестве простейшего примера на рис.26,а показан цикл C_4 , в котором имеется паросочетание размером два (красные ребра), а также вершинное покрытие размером два (зеленые вершины на рисунке). Следовательно, для такого графа $\beta(C_4) = \alpha'(C_4) = 2$, и поэтому соответствующее паросочетание является максимальным, а вершинное покрытие — минимальным.

5.3.2. В общем случае произвольного графа G равенство $\beta(G) = \alpha'(G)$ не выполняется. В качестве наиболее характерного и простого примера графа, в котором $\beta(G) > \alpha'(G)$, можно привести граф C_5 , для которого $\beta(C_5) = 3$, а $\alpha(C_5) = 2$ (рис.26,б). В двудольном же графе равенство $\beta(G) = \alpha'(G)$ выполнено всегда. Именно, имеет место следующая

Теорема 5.14 (Кёниг, 1931; Эгервари, 1931). *В любом двудольном графе G количество $\alpha'(G)$ ребер в максимальном паросочетании равно количеству $\beta(G)$ вершин в минимальном вершинном покрытии G .*



Рис. 26

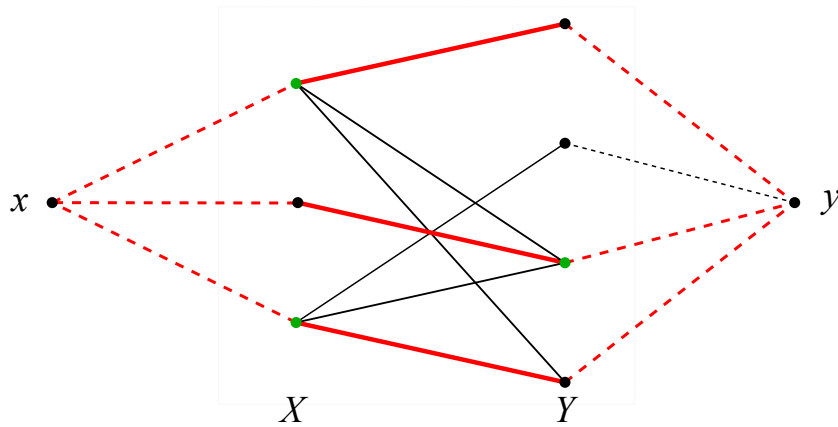


Рис. 27

Доказательство легче всего провести, используя вершинную теорему Менгера. Именно, добавим к вершинам графа $G[X, Y]$ две дополнительные вершины x и y , и соединим с x все вершины блока X , а с y — все вершины блока Y (рис.27). Заметим, что в полученном графе G' любое подмножество S множества $V(G')$ вершин разделяет вершины x и y тогда и только тогда, когда это же подмножество покрывает все ребра исходного графа $G[X, Y]$ (зеленые вершины на рисунке). Кроме того, любое множество путей в графе G' , соединяющих вершины x и y и не имеющих общих внутренних вершин, образует некоторое паросочетание в графе $G[X, Y]$ (красные ребра на рисунке). Верно и обратное: любое паросочетание M в G может быть продолжено до путей, соединяющих в графе G' вершины x и y , и не имеющих общих внутренних вершин. Теперь для доказательства равенства $\alpha'(G) = \beta(G)$ достаточно сослаться на вершинную теорему Менгера. \square

5.3.3. Теорему Кенига-Эгервари можно переформулировать в матричном виде. Именно, рассмотрим прямоугольную матрицу A , состоящую из нулей и единиц. Пусть l есть максимальное количество единиц, которые можно выбрать так, чтобы никакие две из них не принадлежали одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A . Пусть число k равно минимальному количеству строк и (или) столбцов, содержащих все единицы матрицы A . Тогда справедливо равенство $l = k$.

К примеру, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

существуют $l = 2$ единицы, обведенные в квадратную рамочку, которые не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A . Далее, существует $k = 2$ строки,

которые содержат все единицы матрицы A .

Чтобы убедиться, что данное утверждение есть простая переформулировка теоремы Кёнига на матричном языке, достаточно ввести в рассмотрение двудольный граф G , блоки X и Y которого отвечают множеству строк и множеству столбцов матрицы A , и соединить вершины этого двудольного графа в том случае, когда на пересечении соответствующих строки и столбца в матрице A стоит единица. В этом случае l окажется равным количеству ребер в максимальном паросочетании графа G , а k — количеству вершин в минимальном вершинном покрытии G .

6 Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта, формула Татта-Бержа

6.1. Вернемся к задаче поиска совершенного паросочетания в произвольном графе G , то есть паросочетания, покрывающего все вершины графа G .

6.1.1. Первый и основной вопрос, возникающий при решении данной задачи, состоит в следующем: а существует ли в принципе в заданном графе G хотя бы одно совершенное паросочетание? Иными словами, нам хотелось бы понимать, какими свойствами должен обладать граф G , чтобы в нем гарантированно существовало совершенное паросочетание.

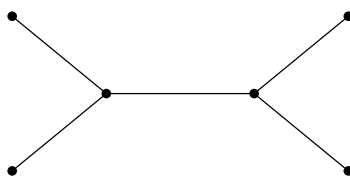


Рис. 28

Ранее мы уже упоминали, что совершенное паросочетание невозможно построить в случае, когда количество вершин в графе нечетно. К сожалению, довольно простое условие четности вершин в графе G не гарантирует нам существование совершенного паросочетания в G . В качестве примера на рис.28, показан достаточно простой граф, построенный на четном числе вершин, совершенное паросочетание в котором отсутствует.

6.1.2. Необходимое и достаточное условие существования в графе совершенного паросочетания было получено в 1947 году одним из создателей современной теории графов Уильямом Таттом. Прежде чем формулировать соответствующий результат, давайте поймем, из каких соображений его можно получить.

Рассмотрим произвольный граф G , в котором существует совершенное паросочетание M . Выделим в этом графе некоторое абсолютно произвольное подмножество S множества $V(G)$ вершин графа G и удалим все вершины этого подмножества. Напомним, что при удалении вершин в графе G вместе с ними удаляются и все инцидентные им ребра. В полученном в результате такой операции графе $G - S$ могут оказаться несколько компонент связности. Будем называть отдельную компоненту связности, содержащую четное количество вершин, *четной* компонентой, а компоненту, содержащую нечетное количество вершин — *нечетной* компонентой.

На рис.29,а в качестве примера показан граф G , построенный на четырнадцати вершинах. Совершенное паросочетание M в таком графе состоит из семи ребер, помеченных красным цветом

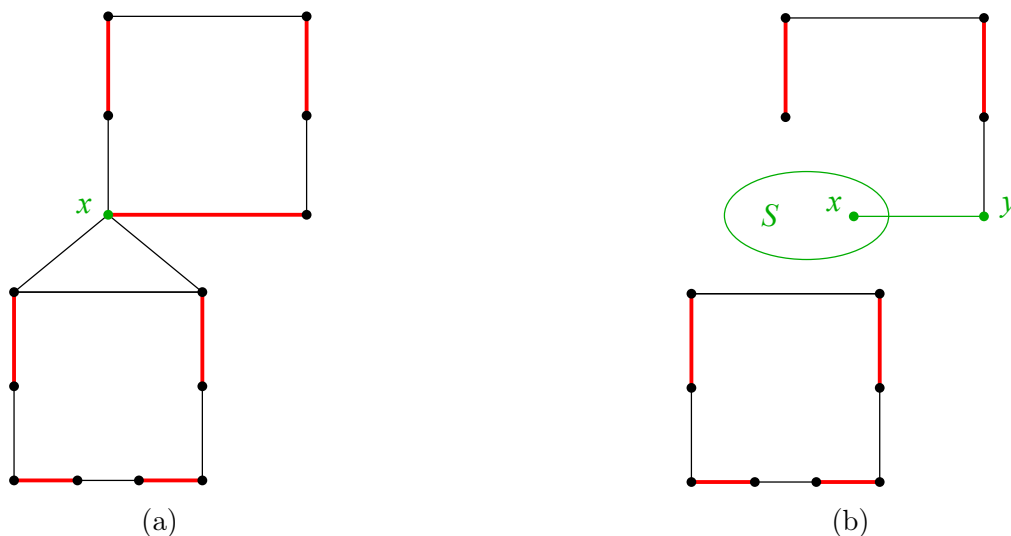


Рис. 29

на рисунке. Включим в подмножество S единственную вершину x , помеченную зеленым цветом на рисунке. После удаления этой вершины исходный граф G распадется на две компоненты связности — четную и нечетную (рис. 29,b).

Давайте обратим внимание на произвольную нечетную компоненту графа $G - S$. В этой компоненте у нас остались ребра, входившие в исходное совершенное паросочетание M . Они, очевидно, покрывают только четное количество вершин этой компоненты. Следовательно, среди вершин рассматриваемой нечетной компоненты обязательно найдется хотя бы одна вершина y , покрытая в исходном графе G ребром, входящим в совершенное паросочетание M и соединяющим эту вершину y с одной из вершин удаленного подмножества S (ребро $\{x, y\}$ на рис.29,b).

Теперь рассмотрим все нечетные компоненты графа $G - S$. Как мы убедились выше, из каждой такой компоненты в исходном графе G у нас обязано исходить принадлежащее M ребро, соединяющее какую-то вершину x нечетной компоненты с какой-то *своей* вершиной y подмножества S . Следовательно, количество вершин в S должно быть не меньше количества нечетных компонент связности в графе $G - S$:

$$c_{\text{odd}}(G - S) \leq |S| \quad \forall S \subset V(G). \quad (4)$$

Здесь $c_{\text{odd}}(G - S)$ — количество нечетных компонент связности графа $G - S$.

Заметим сразу, что из условий (4) следует, в частности, тот факт, что и сам граф G , и любая его связная компонента имеют четное число вершин. Действительно, выбирая в качестве S пустое множество \emptyset , мы получаем, что $c_{\text{odd}}(G) \leq |\emptyset| = 0$, а это и означает, что в графе G отсутствуют компоненты связности, имеющие нечетное число вершин.

6.1.3. Оказывается, что условие (4) является не только необходимым, но и достаточным для существования в графе G совершенного паросочетания.

Теорема 6.1 (Татт, 1947). *В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ количество $c_{\text{odd}}(G - S)$ нечетных компонент связности графа $G - S$ не превосходит мощности $|S|$ множества S .*

Доказательство. Необходимость условий (4) мы уже доказали, так что нам осталось доказать достаточность условий (4) для существования совершенного паросочетания в графе G . Доказывать это мы будем от противного. Именно, мы предположим, что у нас имеется граф G , в

котором условия Татта (4) выполнены, а совершенное паросочетание отсутствует, и получим где-то противоречие.

Так как условия Татта для графа G выполнены, то этот граф построен на четном количестве вершин $n = |V(G)|$. Кроме того, этот граф отличен от полного графа K_n — в полном графе на четном количестве вершин совершенное паросочетание, очевидно, существует. Следовательно, в G имеется хотя бы одна пара несмежных между собой вершин. Соединим эту пару вершин ребром и покажем, что в результате этой операции условия Татта (4) не нарушатся.

Действительно, добавление к графу G ребра изменит количество нечетных компонент лишь в том случае, когда это ребро соединит две нечетные компоненты связности в графе $G - S$. Но при этом количество $c_{\text{odd}}(G - S)$ таких нечетных компонент уменьшится, а количество $|S|$ удаляемых вершин от добавления к графу ребра никак не изменится. Поэтому, если до добавления ребра условия (4) были выполнены, то они тем более останутся выполненными и после добавления к графу G ребра.

Давайте тогда возьмем исходный граф G и начнем добавлять к нему ребра, соединяющие несмежные вершины этого графа. На каком-то шаге мы обязательно придем к так называемому *насыщенному* графу G^* — графу, у которого совершенное паросочетание еще отсутствует, но прибавление к которому *любого* ребра приведет к появлению в новом графе совершенного паросочетания. Действительно, соединив все несмежные в графе G вершины, мы придем к полному графу K_n на четном количестве n вершин, в котором совершенное паросочетание гарантированно существует. Следовательно, добавляя к G ребра так, чтобы в новых графах совершенное паросочетание отсутствовало, мы на каком-то шаге обязательно придем к ситуации, когда соединить *любую* пару несмежных вершин ребром и не получить в результате этой операции граф без совершенного паросочетания окажется невозможным, то есть придем к насыщенному графу G^* .

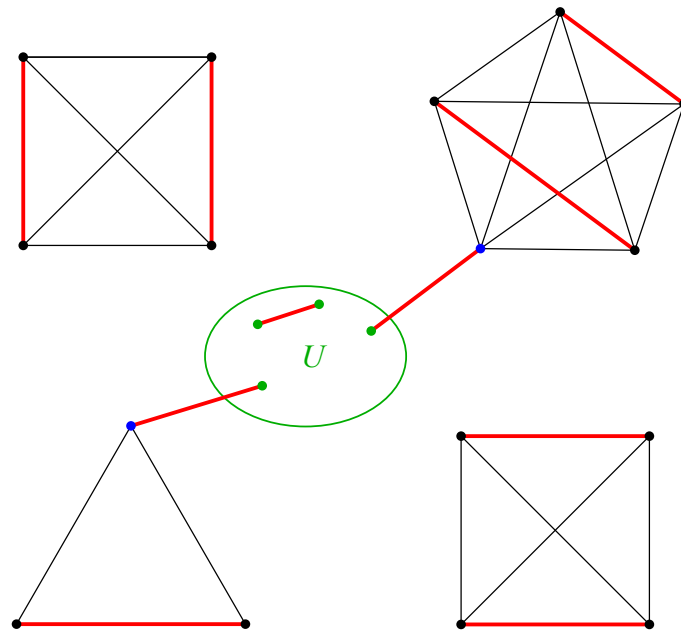


Рис. 30

Выделим теперь в полученном из G насыщенном графе G^* подмножество U вершин, каждая из которых соединена со всеми вершинами графа G^* , то есть подмножество U вершин, каждая из которых имеет степень $n - 1$. Ниже мы покажем (см. лемму 6.2), что граф $G^* - U$, полученный

после удаления такого подмножества U вершин, представляет собой объединение нескольких несвязных друг с другом полных графов. Так как в силу условий (4) в графе $G^* - U$ не более $|U|$ нечетных компонент связности, то мы всегда сможем совершить следующие операции (см. рис.30):

1. построить в каждой компоненте связности графа $G^* - U$, содержащей четное число вершин, совершенное паросочетание (ребра, помеченные красным цветом на рис.30);
2. построить в каждой нечетной компоненте связности этого графа паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной (красные ребра на рис.30);
3. соединить каждую оставшуюся вершину в каждой из компонент нечетной связности (синие вершины на рис.30) с какой-то своей вершиной из множества U ;
4. разбить на пары оставшееся множество \tilde{U} вершин в U и соединить их ребрами (красные ребра, соединяющие пары зеленых вершин на рис.30).

Последнюю операцию мы можем совершить потому, что, во-первых, все вершины в \tilde{U} смежны друг с другом по построению множества U , а во-вторых, количество таких вершин четно. Действительно, удаляя из четного числа вершин в графе G^* вершины, входящие в компоненты с четным числом вершин, мы вновь получаем четное число. Далее, вычитая из остатка нечетное число вершин любой компоненты нечетной связности вместе с одной из вершин множества U , мы вновь получаем четное число.

Таким образом, мы построили в графе G^* совершенное паросочетание, что противоречит определению насыщенного графа. Полученное противоречие доказывает достаточность выполнения условий (4) для существования совершенного паросочетания в графе. \square

6.1.4. Итак, для доказательства теоремы Татта нам осталось доказать следующее утверждение.

Лемма 6.2. Пусть U есть подмножество вершин насыщенного графа G^* , каждая из которых соединена со всеми вершинами графа G^* , то есть подмножество вершин, каждая из которых имеет степень $n-1$, $n = |V(G^*)|$. Тогда в графе $G^* - U$ любая компонента связности является полным графом.

Доказательство. Будем доказывать это утверждение от противного. Именно, мы предположим, что это не так, то есть что в графе $G^* - U$ имеется компонента связности, не являющаяся полным графом. В такой компоненте имеется как минимум три вершины (компоненты связности, содержащие одну или две вершины, изоморфны полным графам K_1 и K_2), и в ней обязана существовать пара несмежных между собой вершин a и c , имеющих общую смежную вершину b (см. одно из упражнений к первой главе). Наша задача — показать, что отсутствие ребра $\{a, c\}$ противоречит насыщенности графа G^* .

Так как вершина $b \notin U$, то степень этой вершины отлична от $n-1$. Следовательно, в графе G^* найдется хотя бы одна вершина d , несмежная с b . Так как любая вершина из U смежна со всеми вершинами графа G^* , то вершина d также принадлежит $V(G^* - U)$. Таким образом, отсутствие ребра $\{a, c\}$ в графе $G^* - U$ означает, что в таком графе имеются по меньшей мере две пары несмежных между собой вершин.

Согласно определению насыщенного графа G^* , добавление к нему любого ребра e превращает $G^* + e$ в граф, в котором совершенное паросочетание уже существует. Важно отметить, что

добавленное ребро e обязано этому совершенному паросочетанию принадлежать — в противном случае совершенное паросочетание можно было бы построить и в исходном графе G^* , что, согласно нашему предположению, невозможно.

Рассмотрим теперь графы $G_1 := G^* + \{a, c\}$ и $G_2 := G^* + \{b, d\}$, полученные добавлением к графу G^* ребер $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ соответственно. Как мы заметили выше, в таких графах существуют некоторые совершенные паросочетания M_1 и M_2 , причем ребро $\{a, c\}$ входит в паросочетание M_1 , а ребро $\{b, d\}$ принадлежит паросочетанию M_2 . Образует симметрическую разность $M_1 \Delta M_2 =: F$ двух паросочетаний и рассмотрим остовный подграф H графа G^* с $E(H) = F$. Так как паросочетания M_1 и M_2 являются совершенными, то любая вершина $x \in V(G^*) = V(G_1) = V(G_2)$ покрыта как ребром $e_1 \in M_1$, так и ребром $e_2 \in M_2$. В случае, если $e_1 = e_2$, эта вершина остается непокрытой ребрами из F . Если же $e_1 \neq e_2$, то степень вершины x в H равна двум. Следовательно, любое ребро в H обязано принадлежать некоторому циклу.

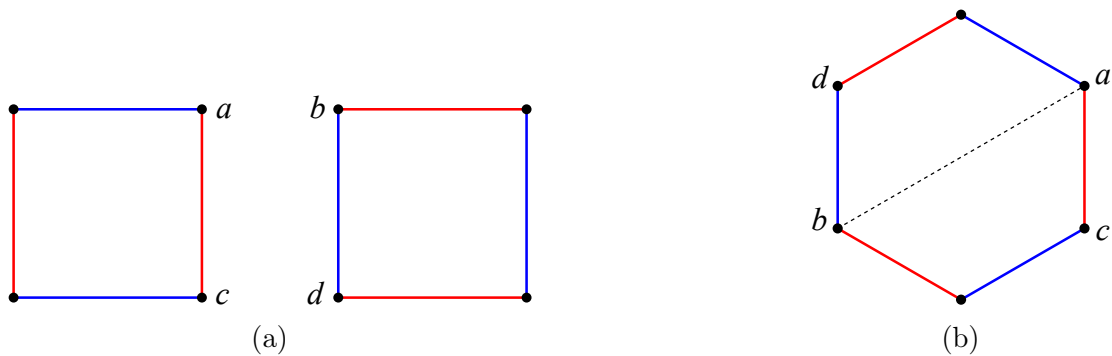


Рис. 31

Возможны два случая. В первом из них ребра $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ принадлежат двум различным циклам C_1 и C_2 (рис.31,а). Во втором случае эти ребра лежат на одном и том же цикле $C_1 = C_2 =: C$ (рис.31,б). Покажем, что в обоих случаях мы всегда сможем сконструировать из паросочетаний M_1 и M_2 некоторое новое паросочетание M , покрывающее все вершины в графе G^* . Тем самым мы получим противоречие с тем, что граф G^* является насыщенным, доказывающее лемму.

Предположим вначале, что циклы C_1 и C_2 различны (рис.31,а). Выделим в цикле C_1 ребра, принадлежащие паросочетанию M_2 (синие ребра на рис.31,а), а в цикле C_2 — ребра из паросочетания M_1 (красные ребра на рис.31,а). Эти ребра, во-первых, покрывают все вершины циклов C_1 и C_2 . Во-вторых, этот набор ребер не содержит ни ребро $\{a, c\}$, ни ребро $\{b, d\}$. Добавляя к полученному набору ребра, к примеру, паросочетания M_1 , не входящие ни в цикл C_1 , ни в цикл C_2 , мы получаем некоторое совершенное паросочетание M в графе G^* .

Разберем теперь вариант, при котором ребра $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ принадлежат одному и тому же циклу C (рис.31,б). Будем двигаться по этому циклу от вершины b в направлении, задаваемым ребром $\{b, d\}$, до тех пор, пока не встретим одну из вершин ребра $\{a, c\}$. Пусть для определенности это будет вершина a (смотри рис.31,б). Пройденная цепочка ребер P_1 начинается и заканчивается ребрами, принадлежащими паросочетанию M_2 (синие ребра на 31,б). Оставшаяся же часть цикла C — цепочка P_2 — ограничена ребрами паросочетания M_1 (красные ребра на рисунке). Рассмотрим тогда ребро $\{a, b\} \in E(G^*)$, разбивающее цикл C на две половины. Добавим к нему ребра цепочки P_1 , принадлежащие паросочетанию M_1 , а также ребра из P_2 , относящиеся к паросочетанию M_2 . В результате мы получим паросочетание, покрывающее все вершины цикла C и не содержащее ни ребро $\{b, d\}$, ни ребро $\{a, c\}$. Дополняя это паросочетание ребрами из M_1 , не входящими в цикл C , мы вновь получим совершенное паросочетание M в

насыщенном графе G^* . □

6.2. Теорема Татта играет очень важную роль в теории паросочетаний. Прежде всего, она дает хорошую характеристику существования совершенного паросочетания в графе. Если такое существует, нам достаточно просто его предъявить. Если же его нет, то, согласно теореме Татта, гарантированно найдется множество S , для которого условие Татта (4) нарушается (так называемое множество Татта).

Кроме того, с помощью теоремы Татта достаточно просто доказываются разного рода достаточные условия существования совершенных паросочетаний в том или ином классе графов. Схема доказательства такого рода доказательств обычно такова: рассматривается описанная в теореме декомпозиция и предполагается, что граф не имеет совершенного паросочетания. Затем с помощью разного рода подсчетов или оценок получается то или иное противоречие.

6.2.1. В качестве примера такого рода рассуждений можно привести один из первых результатов теории графов, доказанный Петерсеном еще в 1891 году. Этот результат касается достаточных условий существования совершенного паросочетания в так называемом кубическом графе, то есть регулярном графе, степень $\deg(x)$ любой вершины x которого равна трем. Исходное доказательство Петерсена было достаточно сложным. Мы же дадим более простое доказательство, опирающееся на теорему Татта.

Теорема 6.3 (Петерсен, 1891). *Каждый связный кубический граф G , имеющий не более двух мостов, обладает совершенным паросочетанием.*

6.2.2. Прежде чем доказывать теорему Петерсена, сформулируем и докажем следующее полезное для дальнейших рассуждений утверждение.

Лемма 6.4. *Для любого подмножества S множества $V(G)$ вершин графа G четность числа $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ совпадает с четностью количества $n = |V(G)|$ вершин в графе G :*

$$c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное подмножество S множества $V(G)$ вершин графа G . Любое такое подмножество разбивает все множество $V(G)$ вершин на $c_{\text{odd}}(G - S)$ блоков V_i , отвечающих нечетным компонентам графа $G - S$, $c_{\text{even}}(G - S)$ блоков U_j , соответствующих четным компонентам графа $G - S$, а также на блок, состоящий из вершин самого подмножества S :

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{c_{\text{odd}}(G-S)} \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{c_{\text{even}}(G-S)} \cup S.$$

Так, для изображенного на рисунке 30 графа G и подмножества S мы имеем $c_{\text{odd}}(G - S) = 2$ нечетных блока и $c_{\text{even}}(G - S) = 2$ четных блока.

Количество вершин во всех блоках U_j четно, поэтому в результате удаления из графа G этих вершин мы получим количество вершин той же четности, что и n . Возьмем теперь в каждом нечетном блоке все вершины, кроме одной, и удалим эти вершины. Так как число удаляемых вершин в каждом таком блоке четно, то четность оставшегося количества вершин по-прежнему будет совпадать с четностью n .

Заметим теперь, что у нас осталось по одной вершине из каждой нечетной компоненты (вершины, помеченные синим цветом на рис.30), а также все вершины подмножества S (зеленые вершины на рис.30). Следовательно, общее количество оставшихся вершин равно $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$, и это число совпадает по четности с количеством n всех вершин:

$$c_{\text{odd}}(G - S) + |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Вычтем теперь из числа $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$ четное число, равное удвоенному количеству вершин подмножества S . Полученное в результате число $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ будет иметь ту же четность, что и число $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$, а следовательно, что и n :

$$c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Лемма доказана.

6.2.3. Приступим теперь к доказательству теоремы Петерсена. Заметим, прежде всего, что в кубическом графе количество $|V(G)|$ вершин четно — это сразу следует из первой теоремы теории графов:

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 3 \cdot \sum_{x \in V(G)} 1 = 3|V(G)| = 2|E(G)| \quad \implies \quad |V(G)| - \text{четное число}.$$

Теперь предположим, что граф G не имеет совершенного паросочетания. Тогда, согласно условию Татта, в графе можно выделить такое подмножество S вершин, после удаления которых количество $c_{\text{odd}}(G - S)$ нечетных компонент графа $G - S$ оказывается больше количества $|S|$ удаленных из графа G вершин:

$$c_{\text{odd}}(G - S) > |S| \quad \iff \quad c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 1.$$

Лемма 6.4 говорит нам о том, что разность $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ совпадает с четностью n . Так как n четно, то четна и разность $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$. Как следствие, равенство вида

$$c_{\text{odd}}(G - S) = |S| + 1$$

никогда выполняться не сможет, так что неравенство $c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 1$ можно усилить:

$$c_{\text{odd}}(G - S) > |S| + 1 \quad \iff \quad c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 2.$$

6.2.4. Вернемся к кубическим графам. Обозначим через G_i произвольную нечетную компоненту такого графа, полученную в результате удаления из кубического графа G какого-то подмножества S вершин, а через m_i — количество ребер, соединяющих эту компоненту с подмножеством S . Покажем, что m_i обязано быть нечетным числом.

Согласно первой теореме теории графов, сумма степеней вершин в компоненте G_i , равная удвоенному количеству ребер в этой компоненте, является четным числом. Но в рассматриваемом случае сумма степеней вершин равна

$$\sum_{x \in V(G_i)} \deg(x) = 3|V(G_i)| - m_i.$$

Действительно, если бы из G_i никаких ребер в S не выходило, то каждая вершина G_i имела бы степень, равную трем, а суммарная степень вершин равнялась бы $3|V(G_i)|$. Однако за счет исходящих из G_i ребер у некоторых из этих вершин степень уменьшится на количество ребер, соединяющих эту вершину с вершинами множества S . Суммарное же уменьшение суммы всех степеней вершин из G_i как раз и окажется равным m_i . Таким образом, мы показали, что

$$3|V(G_i)| - m_i = 2|E(G_i)|.$$

Но количество $|V(G_i)|$ вершин в нечетной компоненте G_i является нечетным числом, и поэтому для выполнения этого равенства m_i также обязано быть нечетным.

6.2.5. Заметим теперь, что в кубическом графе, имеющем не более двух мостов, не более двух чисел m_i могут равняться единице. Действительно, если бы это было не так, то у нас нашлось бы множество S , соединенное с тремя или более нечетными компонентами G_i одиночными ребрами. Такие ребра образуют мосты в исходном графе G , а их, по условию, не должно быть больше двух.

Просуммируем теперь числа m_i по всем нечетным компонентам G_i , образующимся после удаления в графе G подмножества S вершин. В случае, когда все $m_i \geq 3$, мы получаем неравенство вида

$$\sum_i m_i \geq 3 c_{\text{odd}}(G - S).$$

В случае, когда ровно одна $m_i = 1$, аналогичное неравенство принимает вид

$$\sum_i m_i \geq 3(c_{\text{odd}}(G - S) - 1) + 1 = 3 c_{\text{odd}}(G - S) - 2.$$

Наконец, в случае, когда ровно два числа $m_i = 1$, наша оценка на сумму m_i выглядит так:

$$\sum_i m_i \geq 3(c_{\text{odd}}(G - S) - 2) + 2 = 3 c_{\text{odd}}(G - S) - 4.$$

Итак, в самом худшем для нас случае сумма чисел m_i больше или равна $3 c_{\text{odd}}(G - S) - 4$. Но ранее мы показали, что $c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 2$. Сравнивая эти два неравенства, мы получаем, что

$$\sum_i m_i \geq 3|S| + 2.$$

Однако такое неравенство выполняться не может — максимальное количество ребер, которое может исходить из S , равно $3|S|$. Мы же получили, что количество ребер, соединяющих S только с нечетными компонентами, строго больше $3|S| + 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Петерсена.

6.2.6. Заметим, что условие “не более двух мостов” является существенным — так, изображенный на рис.?? кубический граф (граф Сильвестра), имеющий три моста, совершенного паросочетания не имеет. Действительно, после удаления единственной вершины x в графе $G - \{x\}$ образуется три нечетных компоненты, то есть для такого графа условие Татта уже не выполняется.

6.2.7. Доказательства указанного выше рода можно обобщить и на более общие случаи. В частности, более-менее похоже доказывается следующий результат.

Теорема 6.5 (Плесник, 1972). *Пусть G есть k -регулярный и $(k - 1)$ -реберносвязный граф с четным числом вершин. Тогда в графе G' , полученном из G удалением не более, чем $(k - 1)$ ребер, существует совершенное паросочетание.*

6.3. В 1947 году Татт установил и еще один важный результат, позволяющий достаточно просто и быстро проверить существование совершенного паросочетания в графе.

6.3.1. Подход Татта основан на анализе определителя специальной матрицы — так называемой матрицы Татта.

Определение 6.6. Матрицей Татта $T(G)$ для графа G , построенного на n вершинах, называется следующая кососимметричная матрица размера $n \times n$:

$$T(G) := \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь x_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, представляет собой набор независимых переменных, отличных от нуля в случае, если между вершинами i и j найдется ребро $\{i, j\}$, и равных нулю в противном случае.



Рис. 32

В качестве примера рассмотрим графы G_1 и G_2 , показанные на рис.32. Матрицы Татта для таких графов имеют вид

$$T(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & 0 \\ -x_{14} & -x_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & 0 & 0 & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3.2. Теперь рассмотрим определитель $\det(T)$ матрицы Татта T

$$\det(T) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot t_{1\sigma(1)} \cdot t_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot t_{n\sigma(n)}.$$

Здесь $\sigma \in S_n$ — произвольная перестановка n -элементного множества $[n]$, t_{ij} — элементы матрицы T . Заметим, что в случае нечетного n этот определитель тождественно равен нулю. Действительно,

$$\det(T) = \det(T^T) = \det(-T) = (-1)^n \det(T) = 0$$

в случае $n = 2k + 1$. Оказывается, что в случае четного n этот определитель можно записать в виде P^2 , где P — это некоторый полином от переменных x_{ij} , называемый пфаффианом матрицы T .

Определение 6.7. Рассмотрим множество Π всех $(2n-1)!!$ разбиений множества $[2n]$ на неупорядоченные пары. Каждое из таких разбиений можно записать в виде

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}, \quad \text{где } i_k < j_k, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n.$$

Обозначим через σ_α соответствующую этому разбиению перестановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_n & j_n \end{pmatrix}.$$

Тогда пфаффиан P матрицы T определяется по формуле

$$P = \sum_{\alpha \in \Pi} \text{sign}(\sigma_\alpha) \cdot t_{i_1 j_1} \cdot t_{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot t_{i_n j_n}.$$

Очевидно, что любое слагаемое в пфаффиане находится во взаимно однозначном соответствии с некоторым паросочетанием в полном графе K_{2n} . Если мы заменим часть переменных t_{ij} в T на нули, мы получим набор слагаемых, отвечающих совершенным паросочетаниям в произвольном графе G , построенном на $2n$ вершинах. Случаю равенства нулю всех слагаемых в P отвечает отсутствие совершенного паросочетания в графе G .

Так, для матрицы Татта $T(G_1)$, отвечающей графу G_1 , показанному на рис.32,а, определитель матрицы Татта равен

$$\det(T) = x_{13}^2 x_{24}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2 - 2x_{13} x_{14} x_{23} x_{24} = P^2, \quad P = x_{13} x_{24} - x_{14} x_{23}.$$

Следовательно, в графе G_1 найдутся два совершенных паросочетания — совершенное паросочетание, состоящее из ребер $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, а также совершенное паросочетание, ребра которого есть $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$. В случае же графа G_2 , показанного на рис.32,б, определитель матрицы Татта

$$\det(T) = 0 = P^2, \quad P = 0 \cdot x_{34} - 0 \cdot x_{24} + 0 \cdot x_{14},$$

поэтому в таком графе совершенные паросочетания отсутствуют.

6.3.3. Ласло Ловас заметил, что отмеченное Таттом взаимно-однозначное соответствие между слагаемыми пфаффиана и совершенными паросочетаниями в графе можно использовать для быстрой оценки наличия совершенного в графе. Для этого он предложил заменить все ненулевые переменные x_{ij} матрицы Татта случайными числами. При такой замене отличный от нуля пфаффиан с высокой вероятностью останется отличным от нуля и наоборот. Повторяя этот тест несколько раз, мы можем повысить нашу уверенность в существовании или в отсутствии совершенного паросочетания в рассматриваемом графе G .

6.3.4. Мы заметили выше, что каждое из слагаемых пфаффиана отвечает тому или иному совершенному паросочетанию в графе G . Как следствие, пфаффиан позволяет нам не только ответить на вопрос о существовании совершенного паросочетания, но и определить количество таких паросочетаний. Однако с практической точки зрения вычисление пфаффиана, зависящего от символьных переменных x_{ij} , представляет собой достаточно сложную задачу. Все было бы значительно проще, если бы каждое из слагаемых входило в выражение для пфаффиана с одним и тем же знаком — например, было бы положительным. В этом случае, заменяя все слагаемые x_{ij} на единицы, мы могли бы подсчитать количество $m(G)$ совершенных паросочетаний в графе, вычислив пфаффиан матрицы, состоящей из нулей, единиц и минус единиц. Но для этого мы должны уметь каким-то образом менять знаки выражений в пфаффиане. Сделать это можно, перейдя от неориентированного графа к орграфу D и выбирая элементы t_{ij} и t_{ji} матрицы Татта равными x_{ij} и $-x_{ij}$ в случае, если в D существует ориентированное ребро (i, j) .

Определение 6.8. Ориентация D графа G , при которой все слагаемые в пфаффиане P оказываются одного и того же знака, называется пфаффовой ориентацией. Граф, допускающий пфаффову ориентацию, также называется пфаффовым.

В 1963 году Р.Кастелейн показал, что в случае планарных графов такая ориентация существует всегда. Иными словами, он показал, что любой планарный граф является пфаффовым, а значит, теоретически, в любом планарном графе мы можем подсчитать количество совершенных паросочетаний с помощью пфаффиана соответствующей матрицы.

6.4. В заключение данного параграфа рассмотрим графы, в которых совершенные паросочетания отсутствуют.

6.4.1. Для любого такого графа G , согласно критерию Татта (4), найдется подмножество S множества $V(G)$ вершин, количество $|S|$ вершин в котором оказывается строго меньше количества $c_{\text{odd}}(G - S)$ нечетных компонент графа $G - S$. Вместо совершенного паросочетания в таком графе, как правило, требуется найти максимальное паросочетание, то есть паросочетание M , покрывающее максимально возможное количество вершин. При этом часть вершин графа останется непокрытыми этим паросочетанием M .

Определение 6.9. Дефицитом $\text{def}(G)$ графа G называется количество его вершин, не покрытых максимальным паросочетанием M графа:

$$\text{def}(G) := |V(G)| - 2|M|.$$

6.4.2. Часто нам хочется для заданного графа как-то оценить количество вершин, не покрываемых максимальным паросочетанием. В 1958 году французский математик Берж предъявил формулу, обобщающую, по сути, критерий Татта (4) и позволяющую оценить это количество.

Теорема 6.10 (Берж, 1958). *Для любого графа G справедливо равенство*

$$\text{def}(G) = m, \quad \text{где} \quad m := \max_{S \subset V(G)} [c_{\text{odd}}(G - S) - |S|]. \quad (5)$$

Иными словами, для подсчета дефицита графа нам нужно найти подмножество S вершин, удаление которого даст нам максимум разности между количеством нечетных компонент и числом $|S|$ вершин в удаляемом подмножестве S .

Замечание 6.11. Величина m всегда больше или равна нулю. Действительно, выбирая в качестве подмножества S пустое подмножество, мы получаем величину $c_{\text{odd}}(G)$, которая для связного графа G равна нулю в случае, когда количество вершин в графе четно, и единице, когда это количество нечетно. В любом случае $c_{\text{odd}}(G) \geq 0$, а следовательно, больше или равна нулю величина m , рассчитываемая по формуле Бержа (5).

В качестве примера на рис.33 приведен кубический граф G , в котором совершенное паросочетание отсутствует. Помеченное красным цветом максимальное паросочетание M оставляет непокрытыми две вершины такого графа. Это же число дает нам и формула Бержа — удаляя центральную вершину графа G , мы получаем три нечетные компоненты. Вычитая из этого количества $|S| = 1$, мы получим $m = 2$, то есть ровно то количество вершин, которое осталось непокрытым максимальным паросочетанием M . Можно убедиться в том, что большую разность между количеством нечетных компонент и числом вершин в удаляемом подмножестве нам в таком графе не получить.

6.4.3. Приступим к доказательству формулы Бержа. Легче всего доказать, что для любого S дефицит графа оказывается больше или равным числа $k - |S|$, $k := c_{\text{odd}}(G - S)$:

$$\text{def}(G) \geq c_{\text{odd}}(G - S) - |S| = k - |S| \quad \forall S \subset V(G).$$

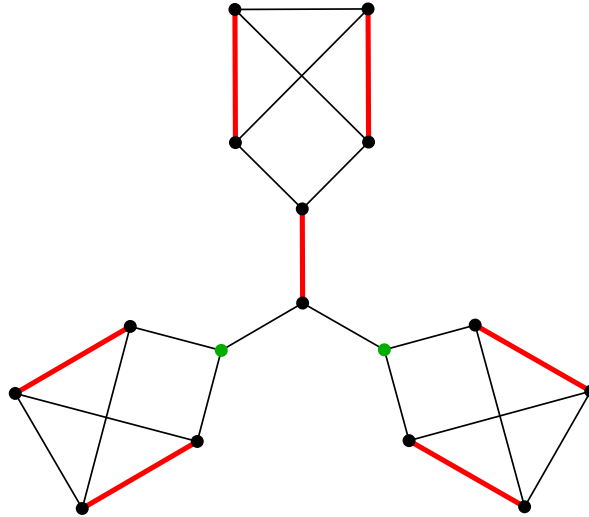


Рис. 33: Граф Сильвестра

Для доказательства этого неравенства рассмотрим некоторое максимальное паросочетание M в графе G , а также произвольное подмножество S множества $V(G)$ вершин. На рис.34 красным цветом помечены ребра, принадлежащие M , а зеленым цветом — вершины, принадлежащие подмножеству S . Некоторые из нечетных компонент, образующихся в результате удаления подмножества S , не соединены в исходном графе G с вершинами подмножества S ребрами, входящими в паросочетание M . В любой такой компоненте обязательно найдется хотя бы одна вершина, не покрытая M (см. вершины, помеченные синим цветом на рис.34). Ясно, что никакое паросочетание нечетное количество вершин покрыть не может. Следовательно, дефицит графа G по крайней мере не меньше количества i таких нечетных компонент:

$$\text{def}(G) \geq i.$$

В оставшихся $k-i$ нечетных компонентах существует по крайней мере одно ребро, соединяющее какую-то вершину x нечетной компоненты с какой-то своей вершиной y подмножества S . В худшем случае каждая вершина подмножества S соединена единственным ребром из M со своей нечетной компонентой (см.рис.34). В этом случае $|S| = k - i$. Если же в S существуют еще какие-либо вершины, или если несколько ребер из M соединяют вершины подмножества S с вершинами какой-то нечетной компоненты, то $|S| > k - i$. Во всех этих случаях

$$|S| \geq k - i \iff i \geq k - |S| \implies \text{def}(G) \geq i \geq k - |S| \quad \forall S \subset V(G).$$

Как следствие, $\text{def}(G) \geq m = \max_{S \subset V(G)} [c_{\text{odd}}(G - S) - |S|]$.

6.4.4. Осталось доказать обратное неравенство. Следствием леммы 6.4 является тот факт, что четность неотрицательного числа

$$m = \max_{S \subset V(G)} [c_{\text{odd}}(G - S) - |S|]$$

совпадает с четностью количества n вершин в графе. Рассмотрим тогда граф \tilde{G} , полученный добавлением к исходному графу G подмножества W , состоящего из m новых вершин, и соединением каждой вершины подмножества W со всеми остальными вершинами нового графа \tilde{G} (рис.35). У такого графа имеется достаточно большое количество ребер, поэтому есть шанс, что в графе \tilde{G} существует совершенное паросочетание. Покажем, что это действительно так.

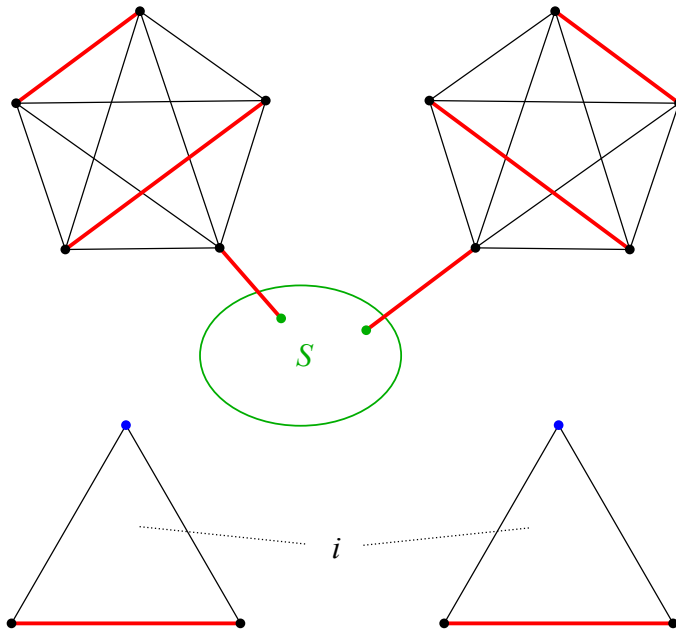


Рис. 34

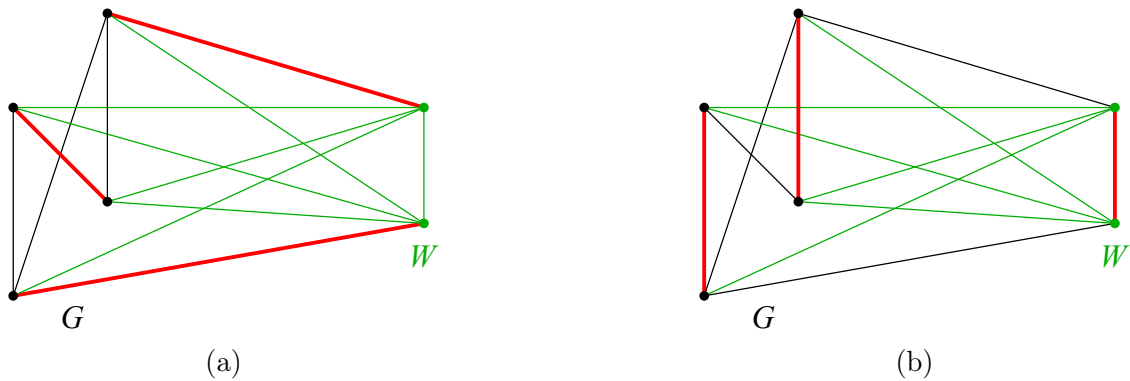


Рис. 35

Заметим, прежде всего, что необходимое условие существования совершенного паросочетания в графе \tilde{G} выполняется — так как четность чисел m и $n = |V(G)|$ совпадает, то количество $|V(\tilde{G})| = n + m$ вершин в новом графе \tilde{G} четно. Иными словами, для подмножества $T = \emptyset$ условие Татта (4) в графе \tilde{G} выполняется. Покажем, что эти условия выполняются и для любого подмножества $T \neq \emptyset$.

Если при удалении подмножества T вершин останется хотя бы одна вершина из множества W , то граф $\tilde{G} - T$ останется связным (см.рис.35), и условие (4) выполнено:

$$c_{\text{odd}}(\tilde{G} - T) \leq 1 \leq |T|.$$

В противном случае, то есть в случае, когда $T = W \cup S$, $S \subset V(G)$, мы по построению графа \tilde{G} получаем, что $\tilde{G} - T = G - S$, и поэтому

$$c_{\text{odd}}(\tilde{G} - T) = c_{\text{odd}}(G - S) \leq m + |S| = |W \cup S| = |T|.$$

6.4.5. Итак, для графа \tilde{G} условия Татта (4) выполняются, то есть в таком графе существует

совершенное паросочетание \tilde{N} . Количество ребер в таком паросочетании равно

$$|\tilde{N}| = \frac{|V(\tilde{G})|}{2} = \frac{n+m}{2}.$$

Давайте теперь поймем, как может выглядеть совершенное паросочетание \tilde{M} в графе \tilde{G} . В принципе, возможен случай, при котором каждая вершина подмножества W соединена ребром $e \in \tilde{M}$ с какой-то своей вершиной исходного графа G (красные ребра на рис.35,а). Иными словами, в этом случае никакая вершина подмножества W не соединена ребром $e \in \tilde{M}$ ни с какой другой вершиной того же подмножества. В этом случае количество ребер совершенного паросочетания, соединяющих между собой вершины исходного графа G , равно $|\tilde{M}| - m$.

Предположим теперь, что некоторые вершины подмножества W соединены между собой ребрами паросочетания \tilde{M} (рис.35,б). В этом случае количество ребер из \tilde{M} , связывающих между собой только лишь вершины исходного графа G , строго больше числа $|\tilde{M}| - m$.

В обоих рассмотренных случаях количество $|N|$ ребер, покрывающих только лишь вершины графа G , больше или равно $|\tilde{M}| - m$. Заметим теперь, что ребра подмножества N образуют какое-то паросочетание в графе G , и количество этих ребер меньше или равно количеству ребер в максимальном паросочетании M . Подводя итоги, получаем, что

$$|M| \geq |N| \geq |\tilde{M}| - m = \frac{n+m}{2} - m = \frac{n-m}{2} \quad \implies \quad m \geq n - 2|M| = \text{def}(G).$$

Теорема Берга доказана. □

Раскраска графов

7 k -раскрашиваемые графы. Теорема Брукса

7.1. Как мы уже неоднократно упоминали выше, любой двудольный граф мы можем рассматривать как двураскрашиваемый граф, то есть граф, вершины которого могут быть правильно окрашены в два цвета. Логично предположить, что наряду с двураскрашиваемыми должны существовать и графы более общего вида, а именно, k -раскрашиваемые графы. К изучению таких графов мы сейчас и перейдем.

7.1.1. Под раскраской вершин графа G понимается разбиение множества V его вершин на блоки, называемые цветами. Задать такое разбиение можно, например, с помощью функции $\varphi : V \rightarrow C$, отображающей множество V вершин на некоторое множество $C = \{1, \dots, k\}$, называемое множеством цветов.

Определение 7.1. Раскраска вершин простого графа G называется *правильной*, если любые две смежные вершины графа окрашены в разные цвета. Любой граф, который допускает правильную раскраску своих вершин в k цветов, называется k -раскрашиваемым графом.

7.1.2. Рассмотрим граф G , построенный на n вершинах. Мы можем взять n цветов и каждую из вершин графа G окрасить в свой цвет. При этом мы, конечно же, получим правильную раскраску вершин графа. Однако такой способ окраски вершин нам не очень интересен — на практике нас, как правило, интересует *минимальное* количество цветов, в которые мы можем правильно раскрасить вершины графа G .

Определение 7.2. Наименьшее количество k цветов, в которое можно правильно покрасить вершины графа G , называется *хроматическим числом* $\chi(G)$ этого графа. Сам граф при этом часто называют k -хроматическим.

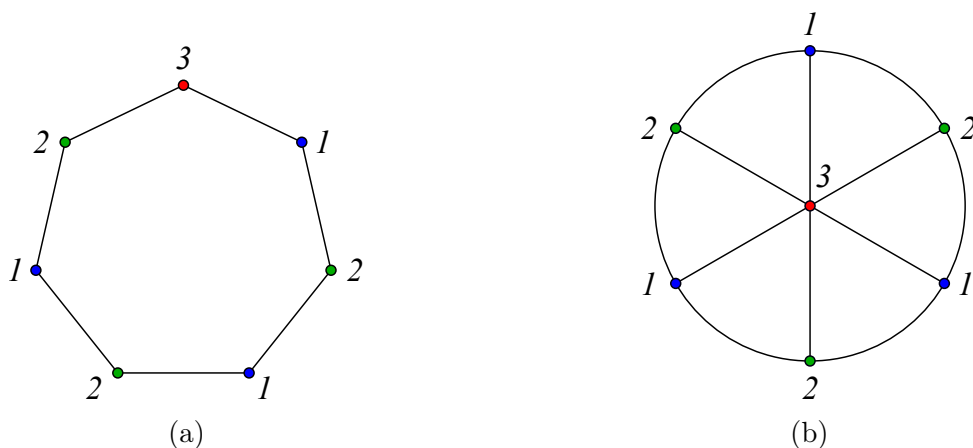


Рис. 36: 3-хроматические графы

Замечание 7.3. При анализе k -раскрашиваемых графов нам достаточно ограничиться простыми графами. Действительно, любая петля соединяет вершину саму с собой. Такую вершину мы одновременно в два цвета раскрасить, конечно же, не сможем, поэтому графы с петлями

являются 1-хроматическими и мы их сразу можем исключить из рассмотрения. Далее, нас, как правило, будет интересовать вопрос, соединены ли у нас в принципе какие-то две вершины ребром или нет. При этом нам совершенно не принципиально, соединены ли эти вершины одним или несколькими ребрами. Так что любое мультиребро мы можем заменить на единственное ребро и рассматривать, таким образом, только лишь простые графы.

7.1.3. Понятно, что простой граф G является 1-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда G представляет собой пустой граф \bar{K}_n , и 2-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда он двудольный. Любой простой цикл нечетной длины является простейшим примером 3-хроматического графа (смотри рис.36,а). Еще одним простым примером 3-раскрашиваемого графа является граф “колесо” (рис.36,б).

Как мы уже заметили выше, хроматическое число любого графа, построенного на n вершинах, ограничено сверху значением n . Эта верхняя граница достигается, например, на полном графе. Действительно, так как любые две его вершины соединены ребром, то никакие две вершины K_n нельзя окрасить в один и тот же цвет. Следовательно, хроматическое число полного графа $\chi(K_n) = n$.

7.1.4. Задачи, связанные с правильной окраской вершин графа G в как можно меньшее количество цветов, достаточно часто встречаются на практике. Приведем несколько характерных примеров такого рода задач [?, ?].

Пример 7.4. Предположим, что студенты в некотором университете учатся по индивидуальным программам и сдают в конце года экзамены по всем предметам, которые они изучали в течение года. Учебный отдел должен так составить расписание экзаменов, чтобы экзамены, на которые должен прийти один и тот же студент, стояли в разные дни. При этом расписание хочется составить так, чтобы количество экзаменационных дней было бы минимальным.

Для формализации данной задачи рассмотрим граф G , множество вершин которого совпадает с множеством читаемых в университете курсов. Соединим две вершины ребром в случае, если хотя бы один студент слушает оба эти курса. Тогда любая правильная раскраска вершин графа G даст нам бесконфликтное расписание, а хроматическое число графа G определит нам минимальное количество экзаменационных дней.

Пример 7.5. Химическая компания производит набор $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ химикатов. Некоторые пары этих химикатов взрываются, если приходят в контакт друг с другом. В качестве меры предосторожности компания делит свой склад на отсеки, помещая в каждый отсек лишь те препараты, которые не взрываются при контакте друг с другом. Задача состоит в нахождении минимального количества отсеков для данного набора химических веществ.

Для решения данной задачи построим граф G на n вершинах, помеченных элементами множества X . Соединим любые две вершины графа ребром в случае, если соответствующие этим вершинам химикаты взрываются при контакте друг с другом. Тогда минимальное количество отсеков, на которые следует разделить склад, совпадает с хроматическим числом $\chi(G)$ графа.

7.2. Любую задачу, связанную с раскраской вершин графа, можно разбить на две подзадачи. Первая подзадача состоит в проверке данного графа G на k -раскрашиваемость, вторая — в определении хроматического числа $\chi(G)$ графа G . Мы знаем, что в случае $k = 2$ существует достаточно простой критерий двураскрашиваемости графа, на основе которого мы можем построить простой алгоритм проверки графа G на двудольность. К сожалению, для любого $k > 2$

никаких простых и удобных критериев проверки графа на k -раскрашиваемость не существует. Говоря формальным языком, задача проверки графа G на k -раскрашиваемость является NP -полной задачей. Как следствие, более сложная задача определения хроматического числа графа NP -сложна. В частности, не существует никакого алгоритма, работающего за полиномиальное время и позволяющего для произвольно взятого графа определить его хроматическое число. В этой связи на практике довольствуются обычно какими-то эвристическими алгоритмами, позволяющими более или менее эффективно определить верхнюю границу хроматического числа $\chi(G)$. Опишем наиболее очевидный и популярный из них — так называемый жадный алгоритм окраски вершин графа.

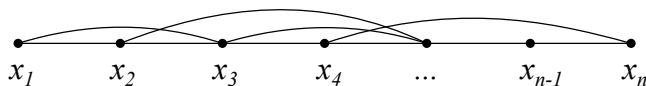


Рис. 37

7.2.1. Линейно упорядочим вершины простого связного графа G (рис.37). Мы знаем, что любой граф на n вершинах мы можем всегда правильно окрасить цветами из множества $Y = \{1, \dots, n\}$. Возьмем это множество цветов и начнем окрашивать вершины графа следующим образом (рис.38):

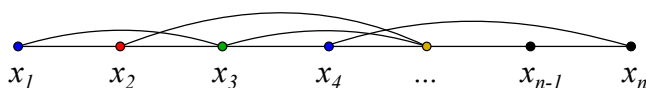


Рис. 38

- окрасим вершину x_1 в цвет 1;
- рассмотрим вторую вершину — вершину x_2 ; если она смежна с вершиной x_1 , то окрасим ее в цвет 2; в противном случае вновь окрасим ее в цвет 1;
- выберем теперь третью вершину x_3 ; если она смежна с вершинами x_1 и x_2 , и если вершины x_1 и x_2 смежны между собой, то x_3 мы сможем окрасить только в новый цвет 3; если она смежна с вершинами x_1 и x_2 , а сами эти вершины не смежны, то мы окрасим ее в цвет 2; если она не смежна ни с одной из вершин x_1 и x_2 , то мы можем ее окрасить в цвет 1; наконец, если она смежна лишь с одной из двух вершин x_1 и x_2 , то мы можем окрасить x_3 в цвет той из вершин x_1 и x_2 , которая с x_3 не смежна;
- опишем теперь общий, k -й шаг алгоритма: рассмотрим вершину x_k , а также все смежные с ней вершины с меньшими индексами; эти вершины как-то нами окрашены на предыдущих шагах алгоритма; исключим тогда из множества Y цветов все те цвета, которые были использованы при окраске смежных с x_k вершин с меньшими индексами; в оставшемся множестве цветов выберем минимальный цвет и окрасим этим цветом вершину x_k .

7.2.2. Описанный нами жадный алгоритм далеко не всегда работает оптимально и может очень сильно зависеть от способа линейного упорядочивания вершин. Несмотря на это, максимальное количество использованных в данном алгоритме цветов никогда не превысит величины $\Delta + 1$, где Δ — максимальная из степеней вершин графа G .

Действительно, в жадном алгоритме для любой вершины x_i количество уже использованных цветов, в которые нельзя окрасить вершину x_i , никогда не превысит величины $\deg(x_i) \leq \Delta$.

Худший случай с точки зрения окраски вершин наступит у нас в том случае, когда мы встретили вершину x степени Δ , и у этой вершины все Δ смежных с ней вершин оказались окрашенными на предыдущих шагах нашего алгоритма. Тогда вершину x мы будем вынуждены окрасить в новый цвет $\Delta + 1$. Во всех остальных случаях количество использованных цветов будет меньше величины $\Delta + 1$.

Проведенные рассуждения доказывают, в частности, следующий важный результат.

Теорема 7.6. *Хроматическое число $\chi(G)$ графа G ограничено сверху величиной $\Delta + 1$, то есть*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1, \quad (6)$$

где Δ — наибольшая из степеней вершин графа G .

Следствие 7.7. *Любой k -хроматический граф обязательно содержит по крайней мере одну вершину степени $k - 1$.*

7.3. Проанализируем верхнюю оценку (6) на хроматическое число $\chi(G)$ графа G .

7.3.1. Заметим, прежде всего, что эта оценка может быть сколь угодно далека от реального значения хроматического числа $\chi(G)$ графа. В качестве характерного примера рассмотрим произвольное дерево T . Так как любое дерево представляет собой двудольный граф, то хроматическое число $\chi(T)$ дерева T равно двум. Однако в дереве могут быть вершины, степени которых сколь угодно велики. Как следствие, число $\Delta + 1$ может быть сколь угодно большим, то есть для таких объектов оценка (6) может быть сколь угодно далека от реальности.

7.3.2. В связи со сделанным выше наблюдением естественным образом возникает следующий вопрос — а можем ли мы как-то улучшить данную оценку? Оказывается, однако, что существуют целые классы графов, для которых эта оценка неупрощаема.

Первый такой класс графов — это полные графы K_n . Мы знаем, что у таких графов $\Delta = n - 1$, а окрасить эти графы меньше, чем в n цветов, невозможно. Следовательно, для полных графов

$$\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1.$$

Ко второму классу графов относятся простые циклы C_{2n+1} нечетной длины (рис.36,а). Для таких циклов $\Delta = 2$, а хроматическое число равно трем. Следовательно, и для таких графов верхняя оценка (6) достигается.

Во всех остальных случаях эту оценку можно уменьшить, но только лишь на единицу. Именно, справедлива следующая

Теорема 7.8 (Brooks, 1941). *Пусть G есть простой граф, не являющийся полным графом или же простым нечетным циклом. Тогда*

$$\chi(G) \leq \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta = \max_{x_i \in V(G)} \deg(x_i).$$

7.3.3. Приступим к доказательству теоремы Брукса. Так как хроматическое число несвязного графа совпадает с максимальным хроматическим числом одной из компонент его связности, то теорему достаточно доказать лишь для связных графов.

Основная идея доказательства состоит в следующем: нам нужно придумать такой способ нумерации вершин графа, при котором в результате запуска жадного алгоритма мы на выходе



Рис. 39

получили бы граф, вершины которого были бы окрашены не более чем в Δ цветов. Заметим сразу же, что при произвольной нумерации вершин жадный алгоритм может окрасить вершины графа более, чем в Δ цветов. В качестве примера рассмотрим двудольный граф, показанный на рис.39,а. Максимальная степень Δ его вершин равна двум. Если же мы пронумеруем вершины графа так, как это указано на рис.39,б, то мы получим окраску вершин этого графа в три цвета.

7.3.4. Легче всего подобную нумерацию вершин придумать в графе G , не являющимся k -регулярным. Действительно, возьмем в графе G произвольную вершину, степень которой строго меньше Δ , и присвоим ей номер n (см.рис.40). Так как граф G связный, то мы, например, поиском в ширину, можем построить остовное дерево T с корнем в вершине n (ребра, помеченные синим цветом на рис.40), назначая вершинам этого дерева номера i , убывающие по мере удаления этих вершин от корня дерева.



Рис. 40

В этом случае любая вершина i , отличная от n , обязательно будет иметь по крайней мере одну смежную с ней в остовном дереве T вершину, номер j который строго больше i . Как следствие, при подходе жадного алгоритма к вершине $i \neq n$ хотя бы одна смежная с i вершина, а именно, вершина j , обязательно останется неокрашенной. Оставшиеся же смежные с i вершины будут окрашены не более чем в $\deg(i) - 1 \leq \Delta - 1$ цветов. Поэтому жадный алгоритм всегда сможет назначить вершине $i \neq n$ один из цветов $1, 2, \dots, \Delta$.

Наконец, так как степень вершины $n < \Delta$, то мы всегда сможем на последнем шаге жадного алгоритма назначить этой вершине хотя бы один неиспользованный цвет из списка $1, 2, \dots, \Delta$.

7.3.5. Рассмотрим теперь Δ -регулярный односвязный граф, имеющий хотя бы одну точку сочленения x (рис.41,а). Такой граф всегда можно разбить на несколько подграфов H_i , имеющих единственную общую вершину x (рис.41,б). В каждом блоке H_i , рассматриваемом отдельно от остальных, степень вершины x строго меньше Δ . Следовательно, любой такой блок H_i можно правильно окрасить в не более чем Δ цветов, используя алгоритм, описанный в предыдущем пункте для нерегулярных графов. Покажем теперь, что данную окраску всегда можно продолжить на весь граф G , окрасив правильно все вершины G не более чем в Δ цветов.

Предположим, что в результате работы жадного алгоритма вершина x в блоке H_i окрасилась в

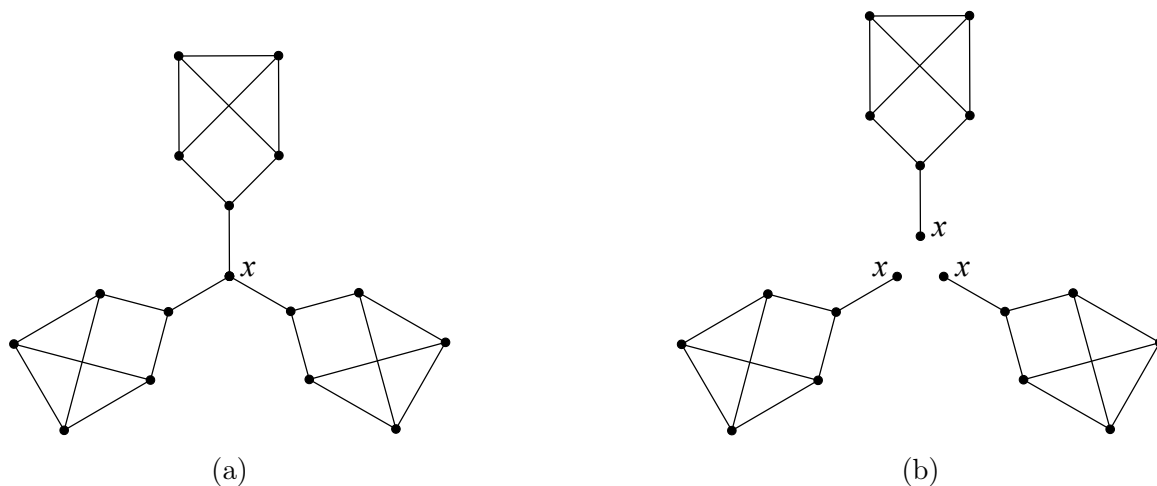


Рис. 41

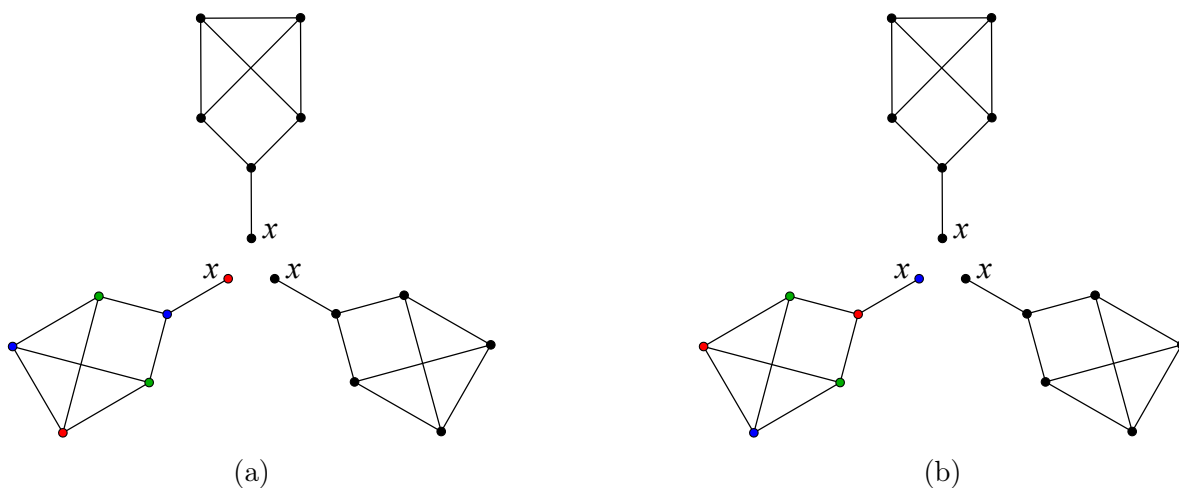


Рис. 42

цвет k (красный цвет на рис.42,а). Рассмотрим все вершины данного блока, окрашенные в цвет k , а также все вершины этого блока, окрашенные в цвет 1 (синий цвет на рис.42,а). Поменяем цвета этих вершин на противоположные (рис.42,б). При этом, очевидно, правильность окраски вершин не нарушится. В результате такой замены вершина x в блоке H_i будет окрашена в цвет 1. Повторяя эту процедуру для каждого из блоков H_i графа G , мы получим в результате правильную окраску всех вершин нашего графа.

7.3.6. Пусть теперь G есть связный простой Δ -регулярный граф без точек сочленения, то есть Δ -регулярный двусвязный граф. Мы можем считать, что $\Delta \geq 3$, так как случаи $\Delta = 0$ и $\Delta = 1$ отвечают элементарным полным графам K_1 и K_2 соответственно, а случай $\Delta = 2$ соответствует либо нечетному циклу, который мы также, как и полный граф, исключили из рассмотрения, либо двудольному графу с $\Delta = 2$, для которого теорема верна.

Выберем в рассматриваемом графе G произвольную вершину x (рис.43,а). Выбирая эту вершину в качестве корня остовного дерева, присваивая ей номер n и размечая оставшиеся $(n - 1)$ вершин с помощью поиска в ширину, мы получим некоторое линейно упорядоченное множество вершин графа G . Как и в случае нерегулярного графа, запуская жадный алгоритм на такой разметке вершин, мы гарантируем, что для окраски произвольной вершины $i \neq n$ нам всегда

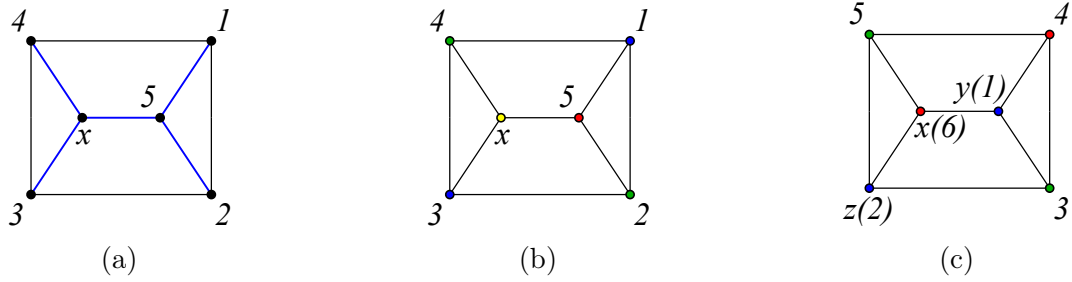


Рис. 43

хватит Δ цветов. При окраске же последней вершины, то есть вершины с номером n , у нас могут возникнуть проблемы (см.рис.43,b). Действительно, у такой вершины все Δ смежных с ней вершин уже оказываются окрашенными на предыдущих шагах жадного алгоритма. В принципе, алгоритм может окрасить каждую из Δ смежных с n вершин в свой цвет. В этом случае вершину с номером n нам придется окрасить в цвет $\Delta + 1$. Иными словами, нам нужно подправить алгоритм разметки вершин так, чтобы подобная ситуация никогда не возникла.

Оказывается, сделать это достаточно просто. Ниже мы покажем, что в любом двусвязном k -регулярном графе обязательно найдется вершина x , имеющая пару соседних несмежных между собой вершин y и z , таких, что граф $G - y - z$ остается связным (см. рис.43,c). Назначим такой вершине x номер n , а вершинам y и z — номера 1 и 2. Удаляя вершины y и z , мы получаем связный граф, вершины которого можно разметить с помощью поиска в ширину, стартуя из вершины $x = n$ и назначая вершинам метки i с номерами, убывающими по мере удаления этих вершин от корня дерева. Добавляя затем обратно вершины y и z , мы получаем граф G , в котором любая вершина, отличная от x , по-прежнему имеет как максимум $\Delta - 1$ смежных с ней вершин, имеющих меньшие номера.

Запустив тогда жадный алгоритм для вершин, упорядоченных в порядке $(1, 2, \dots, n)$, мы окрасим вершины графа в не более чем Δ цветов. Действительно, вершины 1 и 2 алгоритм окрасит в цвет 1 (синий цвет на рис.43,c). Так как любая вершина i , $i = 3, \dots, (n - 1)$, обязательно имеет по крайней мере одну смежную вершину j с номером, большим, чем i , на своем пути к корню n остовного дерева, то жадному алгоритму хватит для ее окраски цветов из множества $\{1, \dots, \Delta\}$. Наконец, среди Δ смежных с n вершин найдутся как минимум две вершины, окрашенные в один и тот же цвет, а именно, вершины 1 и 2. Поэтому для правильной окраски n также окажется достаточно цветов из множества $\{1, 2, \dots, \Delta\}$.

7.3.7. Итак, для полного доказательства теоремы Брукса осталось убедиться в том, что описанная в предыдущем пункте тройка вершин x, y, z в двусвязном Δ -регулярном графе с $\Delta \geq 3$ всегда существует. Выберем произвольную вершину $w \in V(G)$ и рассмотрим граф $G - w$.

Предположим вначале, что такой граф имеет хотя бы одну точку сочленения v . Разобьем граф $G - w$ на блоки B_j — двусвязные подграфы графа $G - w$, а также на точки сочленения v_i (смотри рис.44). Пусть B_1, B_2 — любые два блока графа $G - w$, соответствующие листьям дерева блоков и точек сочленения графа $G - w$, а v_1 и v_2 — принадлежащие этим двум блокам точки сочленения. Так как исходный граф G двусвязный, то существует вершина $y \in (B_1 - v_1)$, смежная с w в графе $G - v_1$, а также вершина $z \in (B_2 - v_2)$, смежная с w в графе $G - v_2$. По построению, вершины y и z несмежны. Кроме того, удаление вершин w, y и z оставляет граф $G - w - y - z$ связным. Но степень Δ в графе больше или равна 3, так что вершина w , помимо y и z , имеет хотя бы одного соседа в $G - y - z$. Следовательно, вершины $x = w, y, z$, образуют искомую тройку вершин в графе G .

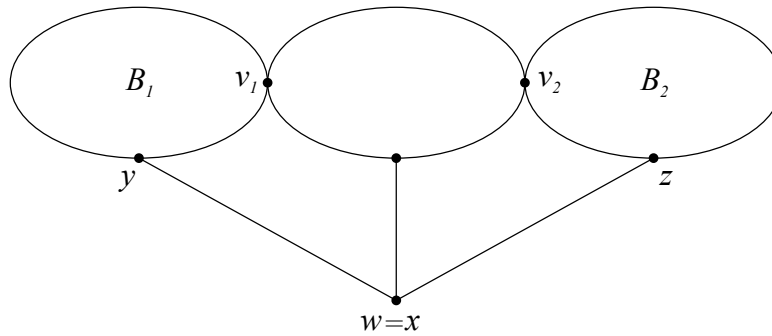


Рис. 44

Предположим теперь, что граф $G - w$ не имеет точек сочленения. Среди вершин графа G найдется хотя бы одна вершина z , находящаяся на расстоянии, равном 2 от вершины w — в противном случае регулярный граф G оказался бы полным графом. Выбирая тогда в качестве x вершину, смежную как с z , так и с w , мы получим искомую тройку $x, y = w, z$ вершин в графе G . Теорема Брукса доказана.

7.4. В заключение данного параграфа рассмотрим важный подкласс графов — так называемые k -критические графы.

Определение 7.9. Граф G называется k -критическим, если $\chi(G) = k$ и хроматическое число $\chi(H)$ любого его собственного подграфа строго меньше k .

7.4.1. Заметим, что любой граф с $\chi(G) = k$ имеет k -критический подграф H . Действительно, удаляя ребра и/или вершины графа G , мы в конечном итоге придем к ситуации, при которой удаление любой вершины и/или ребра уменьшает количество цветов, необходимых для правильной раскраски полученного подграфа.

7.4.2. Достаточно очевидно, что любой k -критический граф G связан — в противном случае мы бы могли удалить одну из связных компонент, не поменяв хроматического числа $\chi(G)$ всего графа. Оказывается, что k -критический граф обязательно двусвязен. Этот факт вытекает из следующего более общего наблюдения.

Утверждение 7.10. В любом k -критическом графе G отсутствует вершинно разделяющее множество S , являющееся кликой.

Следствие 7.11. В k -критическом графе G точки сочленения отсутствуют.

Доказательство легко следует из предложения 7.10 — любая точка сочленения в графе изоморфна K_1 , то есть простейшей клике, состоящей из единственной вершины.

7.4.3. Для доказательства 7.10 нам понадобится понятие S -компоненты графа G .

Определение 7.12. Пусть S есть вершинно разделяющее множество в графе G , и пусть V_1, \dots, V_t есть компоненты связности графа $G - S$. Подграфы G_i , индуцированные подмножествами вершин $S \cup V_i$, называются S -компонентами графа G . Правильная раскраска таких компонент называется *согласованной* в случае, если любая вершина $x \in S$ окрашена в один и тот же цвет для правильной раскраски каждой из S -компонент графа G .

Докажем предложение 7.10 от противного. Предположим, что в k -критическом графе G нашлось вершинно разделяющее множество S , являющееся кликой. Рассмотрим S -компоненты

G_i графа G . Так как исходный граф G является k -критическим, то любой из G_i можно правильно раскрасить в $k - 1$ цвет. Так как S является кликой, то каждая из ее вершин обязана быть окрашена в свой цвет. Меняя цвета этих вершин, мы всегда сможем согласовать раскраску вершин множества S в этих компонентах. Но это означает, что объединение G_i , представляющее собой исходный граф G , окрашено в $k - 1$ цвет, что невозможно. \square

7.4.4. Заметим, что из приведенного выше доказательства предложения 7.10 также следует, что хотя бы одна из S -компонент графа G не имеет правильной раскраски в $k - 1$ цвет, при которой все вершины множества S вершин окрашены в разные цвета. Этот факт нам понадобится при анализе частного случая k -критического графа, в котором существует вершинно разделяющее множество S , состоящее из двух вершин x и y .

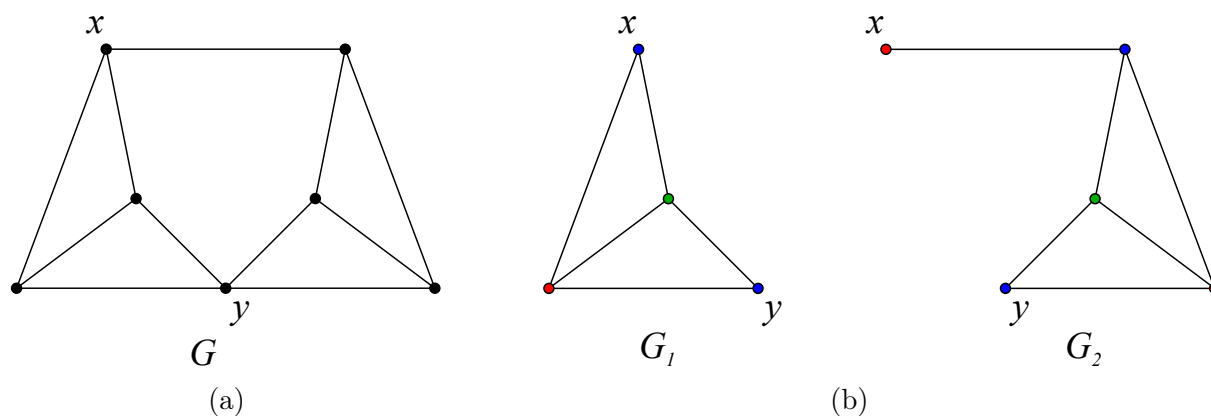


Рис. 45: Граф Хайоша

В качестве примера такого графа рассмотрим так называемый Hajos graph — граф Хайоша (рис.45). В упражнении ?? предлагается доказать, что такой граф является 4-хроматическим графом. Несложно проверить, что этот граф является 4-критическим графом — удаление любого ребра и/или любой вершины позволяет раскрасить получившийся граф в три цвета. Кроме того, в таком графе имеется вершинно разделяющее множество S , состоящее из вершин x и y (рис.45,a).

На рис.45,b показаны две S -компоненты этого графа — графы G_1 и G_2 . Заметим, что при любой минимальной правильной раскраске вершин графа G_1 вершины x и y обязаны быть окрашены в один и тот же цвет. Напротив, в графе G_2 эти вершины должны быть окрашены в разные цвета. Оказывается, аналогичная ситуация имеет место и в общем случае.

Именно, рассмотрим произвольный k -критический граф G , в котором существует вершинно разделяющее множество $S = \{x, y\}$, состоящее из несмежных друг с другом вершин x и y . Мы уже заметили, что хотя бы одна S -компонента G_1 графа G обладает тем свойством, что при любой правильной ее окраске в $k - 1$ цвет вершины x и y оказываются окрашенными в один и тот же цвет. Иными словами, хроматическое число графа $G_1 + \{x, y\}$ обязано равняться k .

Теперь рассмотрим какую-то другую S -связную компоненту G_2 графа G . Если бы в ней вершины x и y также оказались бы окрашены в один и тот же цвет, то мы бы смогли согласовать раскраски компонент G_1 и G_2 . Следовательно, вершины x и y обязаны быть окрашены в разные цвета. Но тогда объединение этих двух графов не может быть окрашено в $k - 1$ цвет. Вспоминая, что граф G является k -критическим, мы получаем, что $G = G_1 \cup G_2$. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 7.13 (Dirac). Пусть G есть k -критический граф, в котором существует вершинно разделяющее множество $S = \{x, y\}$. Тогда G представляет собой объединение двух своих S -компонент G_1 и G_2 , у одной из которых при любой правильной окраске в $k - 1$ цвет вершины x и y окрашены в один и тот же цвет, а у второй — в разные цвета.

8 Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы

8.1. Помимо верхних оценок, для хроматического числа $\chi(G)$ можно пытаться строить и какие-то нижние оценки.

8.1.1. Одна из наиболее очевидных нижних оценок связана с понятием кликового числа $\omega(G)$ графа G , под которым понимается количество вершин в наибольшей клике графа G . Очевидным является следующее

Утверждение 8.1. Хроматическое число $\chi(G)$ любого графа G не может быть меньше его кликового числа:

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Отсюда, в частности, следует простой способ построения графа G с большим хроматическим числом — поместить в граф G клику большого размера. Оказывается, однако, что граф с большим хроматическим числом вовсе не обязан иметь одновременно и большое кликовое число.

8.1.2. Рассмотрим, к примеру, так называемые графы без треугольников, то есть графы, не содержащие простых циклов длины три. Заметим, что любой полный граф K_n , построенный на $n \geq 3$ вершинах, содержит в качестве своих подграфов клики K_k любых размеров $k \in [1, \dots, n - 1]$, и, в частности, обязательно содержит треугольники K_3 . Следовательно, графы без треугольников — это графы с кликовым числом $\omega(G) \leq 2$, то есть графы, которые в качестве своих подграфов не содержат никаких клик помимо ребер K_2 и вершин K_1 .

Теорема 8.2 (Mycielski, 1955). Для любого натурального числа k существует k -хроматический граф без треугольников.

Доказательство данной теоремы основано на следующей конструкции, позволяющей получить из произвольного простого графа G_k некоторый простой граф G_{k+1} , содержащий G_k в качестве своего подграфа:

- добавляем к множеству $V(G_k) = \{x_1, \dots, x_n\}$ вершин графа G_k вершины $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, а также еще одну вершину z ;
- для любого $i = 1, \dots, n$ соединяем ребрами вершину y_i со всеми вершинами исходного графа G_k , смежными с x_i ;
- соединяем вершину z со всеми вершинами множества Y .

Пример 8.3. Рассмотрим в качестве примера 2-хроматический граф $G_2 = K_2$ (рис.46,а). Первая итерация описанной выше конструкции позволяет получить из него 3-хроматический граф $G_3 = C_5$ (рис.46,б). Следующая итерация, примененная к графу C_5 , дает нам так называемый граф Грётцша G_4 (рис.46,с).

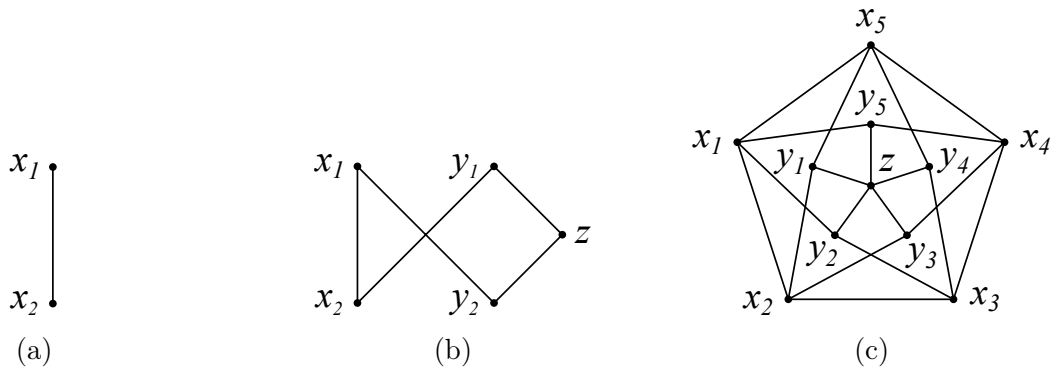


Рис. 46: Графы без треугольников

8.1.3. Покажем по индукции, что граф Грётца G_4 , а также любые графы G_{k+1} , полученные в результате применения данной процедуры к графам G_k , являются $(k + 1)$ -хроматическими графами без треугольников.

Заметим прежде всего, что граф G_{k+1} не содержит никаких треугольников. Действительно, так как все вершины множества Y несмежны друг с другом, то любой потенциальный треугольник в графе G' может содержать лишь одну вершину из множества Y . Как следствие, вершину z такой треугольник содержать уже не может. Поэтому единственный возможный вариант такого треугольника — это простой цикл вида $x_i y_j x_k x_i$. Однако и это невозможно — в противном случае в исходном графе G_k существовал бы треугольник $x_i x_j x_k x_i$, чего быть не может по индукционному предположению.

Теперь покажем, что граф G_{k+1} является $(k + 1)$ -раскрашиваемым. Для этого рассмотрим произвольную правильную окраску графа G_k в k цветов и продолжим ее на граф G_{k+1} следующим образом: окрасим вершины y_i графа G_{k+1} в те же цвета, что и вершины x_i , а вершину z окрасим в цвет $(k + 1)$.

Осталось доказать, что граф G_{k+1} не является k -раскрашиваемым. Предположим, что граф G_{k+1} все же можно правильно окрасить в k цветов. Без потери общности мы можем считать, что вершина z окрашена в цвет k . При таком способе окраски никакая вершина множества Y не может быть окрашена в этот же цвет k . Перекрасим теперь каждую из вершин x_i графа G_k в тот же цвет, в какой окрашена вершина y_i . Так как множество смежных с x_i вершин совпадает для любого i с множеством вершин, смежных с y_i , то такой способ окраски графа G_k будет правильным. Однако этот способ окраски требует лишь $(k - 1)$ цветов, что противоречит индукционному предположению. \square

8.1.4. Итак, любой k -хроматический граф G_k , построенный на $n \geq 4$ вершинах с помощью описанной в теореме 8.2 процедуры, содержит простые циклы длины $l > 3$. Может показаться, что для существования графов без треугольников с достаточно большим хроматическим числом необходимо, чтобы в этом графе существовало достаточно большое количество простых циклов не слишком большой длины. Однако и это предположение оказывается неверным.

Напомним, что обхватом графа G называется длина наименьшего простого цикла в нем. Очевидно, что у любого графа без треугольников обхват строго больше трех.

Теорема 8.4 (Erdos, 1961). *Для любого натурального k существует k -хроматический граф, обхват которого больше или равен k .*

Эрдёш доказал эту теорему с помощью вероятностных методов. Его доказательство было некон-

структивным: он лишь показал, что подобные графы существуют. Несколько лет спустя появились работы, в которых были предложены и конструктивные алгоритмы построения подобного рода графов.

8.2. Вернемся к нижней оценке $\chi(G) \geq \omega(G)$ на хроматическое число. Эта оценка показывает, в частности, что графы с большим кликовым числом $\omega(G)$ гарантированно имеют большое хроматическое число. В этой связи встает вопрос о том, при каких значениях параметров, характеризующих граф G , в графе гарантированно существует клика заданного размера k .

8.2.1. Зафиксируем количество n вершин в графе G и будем следить за числом m ребер в нем. Мы знаем, что при $m = n - 1$ связный граф G представляет собой дерево. Кроме того, в упражнениях к первой главе мы доказали так называемую теорему Мантеля о том, что в графе, содержащем более, чем $n^2/4$ ребер, обязательно существуют треугольники, то есть подграфы, изоморфные K_3 . В 1941 году венгерский математик Турán обобщил этот результат, определив количество ребер, при котором в графе гарантированно существует клика заданного размера. Считается, что с этого результата берет свое начало новый раздел комбинаторики и теории графов — так называемая экстремальная теория графов.

8.2.2. Прежде чем формулировать теорему Турана, напомним, что $n^2/4$ есть также верхняя граница для количества ребер в двудольном графе, построенном на n вершинах, причем эта граница достигается на некотором полном двудольном графе $K_{n,m}$ (см. упражнения к главе 1). Рассмотрим теперь более общее понятие полного k -дольного графа K_{n_1, \dots, n_k} .

Определение 8.5. Граф G называется полным k -дольным графом K_{n_1, \dots, n_k} , $k > 1$, в случае, если множество $V(G)$ его вершин может быть разбито на k блоков V_1, \dots, V_k , таких, что x смежна с y тогда и только тогда, когда x и y относятся к различным блокам этого разбиения.

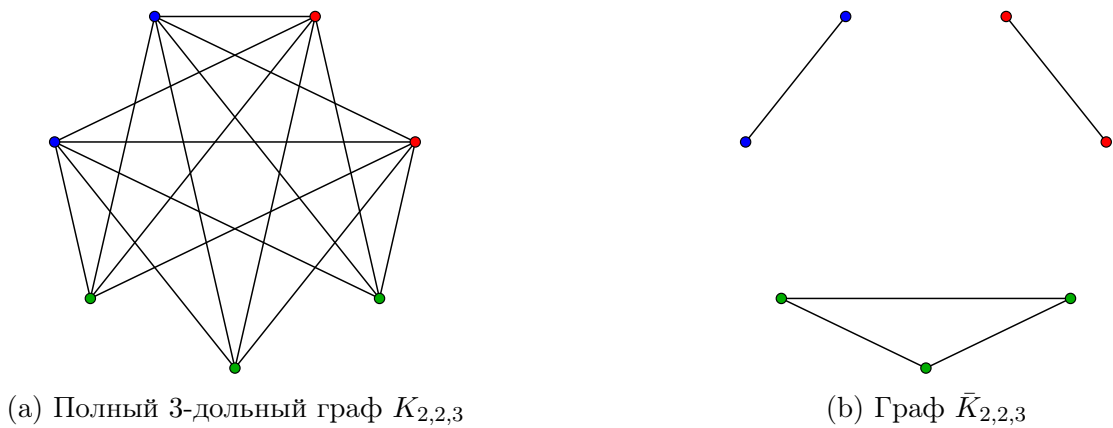


Рис. 47

Заметим, прежде всего, что любой такой граф является k -хроматическим графом: каждый блок V_i разбиения окрашен в свой цвет в некоторой правильной раскраске графа K_{n_1, \dots, n_k} в k цветов. На рис.47,а в качестве примера показан полный 3-дольный граф $K_{2,2,3}$. Кроме того, несложно убедиться в том, что дополнение к полному k -дольному графу представляет собой граф \bar{G} , состоящий из k связных компонент, каждая из которых является полным графом (см.рис.47,б).

8.2.3. Любой граф K_{n_1, \dots, n_k} содержит ровно $m = \sum_{i \neq j} n_i n_j$ ребер. Интуитивно ясно (см. упражнение ??), что количество m ребер станет максимальным в случае, если мы приблизим числа n_i

друг к другу так близко, насколько это возможно. Для этого нам следует потребовать, чтобы в случае $n = t \cdot k + r$, $0 \leq r < k$, ровно r из k блоков, $r = r(n, k) = \{n/k\}$, содержали $t + 1$ вершину, а оставшиеся $k - r$ блоков — t вершин. Подсчитаем количество $M(n, k)$ ребер в таком графе G . В полном графе на n вершинах имеется $\binom{n}{2}$ ребер. Мы знаем, что

$$\binom{n}{2} = |E(G)| + |E(\bar{G})| = M(n, k) + r \binom{t+1}{2} + (k-r) \binom{t}{2}.$$

Отсюда после несложных арифметических преобразований мы получаем, что

$$M(n, k) = \frac{k-1}{2k} \cdot n^2 - \frac{r(k-r)}{2k}. \quad (7)$$

Теорема Турана утверждает, что это число представляет собой верхнюю границу на количество ребер в любом графе, построенном на n вершинах и не содержащем клики размера $k + 1$.

Теорема 8.6 (Turán, 1941). *Пусть количество ребер в простом графе G , построенном на $n = t \cdot k + r$ вершинах, больше числа $M(n, k)$. Тогда G содержит клику размера $k + 1$. В частности, G нельзя правильно раскрасить в k цветов.*

Доказательство. Рассмотрим множество графов, построенных на $n = k \cdot t + r$ вершинах и не содержащих клики размера $k + 1$. Пусть граф G есть граф, имеющий максимальное количество m ребер среди всех графов этого множества. Покажем, что G может содержать как максимум $M(n, k)$ ребер.

Будем действовать индукцией по числу $t = \lfloor n/k \rfloor$. Случаю $t = 0$, $n = r = k$, отвечает граф G , в котором каждый из $k = n$ блоков содержит ровно одну вершину, и каждая такая вершина соединена со всеми оставшимися вершинами. Следовательно, для этого случая $G = K_n$, а число

$$M(n, k) = \frac{n-1}{2n} n^2 + 0 = \binom{n}{2},$$

то есть совпадает с количеством ребер в полном графе. Понятно, что для такого графа требуемое утверждение выполняется тривиальным образом. Поэтому предположим, что это утверждение выполнено при $t - 1$, $t \geq 1$, и покажем, что оно остается верным и для натурального числа t .

По построению графа G , добавление любого ребра e к этому графу вызывает появление в графе $G + e$ клики размера $k + 1$. Следовательно, сам граф G обязан содержать клику S размера k . Оценим количество ребер в графе G . В самой клике имеется $\binom{k}{2}$ ребер. Так как в графе G клика размера $k + 1$ отсутствует, то из любой вершины подграфа $G - S$ в клику S может исходить как максимум $k - 1$ ребро. Наконец, подграф $G - S$ содержит $n - k = (t - 1)k - r$ вершин. Следовательно, количество ребер в нем по индукционному предположению не может быть больше $M(n - k, k)$. Собирая все эти факты вместе, мы получаем, что число m ребер в графе G не превосходит величины

$$\binom{k}{2} + (n - k) \cdot (k - 1) + M(n - k, k) = M(n, k).$$

Действительно, согласно формуле (7),

$$M(n - k, k) = \frac{k-1}{2k} (n - k)^2 - \frac{r(k-r)}{2k},$$

поэтому

$$M(n - k, k) + (n - k) \cdot (k - 1) = \frac{(k-1)(n^2 - k^2)}{2k} - \frac{r(k-r)}{2k} = M(n, k) - \binom{k}{2}.$$

□

8.3. Как мы установили в начале этого параграфа, большое хроматическое число еще не означает, что в графе существуют клики больших размеров. Однако имеется целый класс чрезвычайно важных на практике графов, для которых числа $\omega(G)$ и $\chi(G)$ все же совпадают:

$$\omega(G) = \chi(G) = k.$$

Конечно же, можно построить любое количество таких графов, рассматривая граф, одной из компонент связности которого является k -хроматический граф, а другой — полный граф K_k , у которого $\omega(K_k) = k$. Чтобы исключить подобного рода вырожденные конструкции, вводят понятие так называемого совершенного графа.

Определение 8.7. Граф G называется *совершенным*, если как для самого графа, так и для любого его индуцированного подграфа H хроматическое и кликовое числа совпадают.

Изучим несколько поподробнее такого рода графы.

8.3.1. Впервые термин совершенный граф ввел в 1963 году французский математик Клод Берж (Claude Berge) в своей работе 1963 года. В этой работе он исследовал несколько важных подклассов графов, у которых $\omega(G) = \chi(G)$, и высказал следующие гипотезы о том, как все такие графы устроены.

Теорема 8.8 (Слабая гипотеза Бержа или теорема о совершенных графах). *Граф совершенен тогда и только тогда, когда его дополнение \bar{G} также является совершенным графом.*

Теорема 8.9 (Сильная гипотеза Бержа). *Граф совершенен тогда и только тогда, когда ни G , ни его дополнение \bar{G} не содержат в качестве индуцированного подграфа цикла нечетной длины, большей или равной пяти.*

Ясно, что слабая гипотеза Бержа сразу же следует из сильной гипотезы. Первую гипотезу доказал венгерский математик Ласло Ловас в 1972 году. На этот момент ему было всего лишь 22 года. Доказательство второй гипотезы было анонсировано Chudnowski, Robertson, Seymour, and Thomas лишь в 2002 году. Публикация же этого результата появилась только в 2006 году.

8.3.2. Поговорим немного поподробнее о слабой гипотезе Бержа (теореме о совершенных графах). Заметим, прежде всего, что любая клика в G есть вершинно независимое множество в \bar{G} и наоборот. Как следствие, $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ и $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$. В качестве примера на рис.48,a показан совершенный граф G , хроматическое число которого равно трем. Клика максимального размера $\omega(G) = 3$ в этом графе помечена синим цветом на рис.48,b. На рис.48 показано дополнение \bar{G} графа G . Синим цветом на этом рисунке помечены вершины, образующие вершинно независимое множество в графе \bar{G} .

Заметим теперь, что вершины показанного на рис.49,b графа G можно разбить на два блока (синие и черные вершины на рисунке) так, чтобы индуцированные этими блоками подграфы представляли собой клики. Такое разбиение множества вершин в общем случае называют кликовым покрытием (clique cover) графа G . Минимальный размер кликового покрытия обозначается обычно через $\vartheta(G)$. Заметим теперь, что в графе \bar{G} любой клике кликового покрытия графа G отвечает некоторое вершинно независимое множество (смотри рис.48,c). Окрашивая вершины каждого из таких множеств в свой цвет, мы получим правильную окраску графа

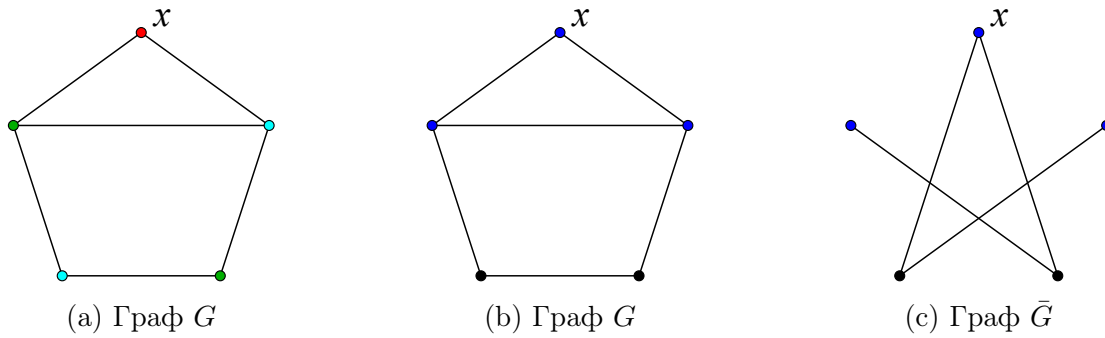


Рис. 48

\bar{G} . В случае, если количество покрывающих граф G клик минимально, минимальным будет и количество цветов, необходимых для окраски вершин графа \bar{G} . Следовательно, мы имеем равенство

$$\chi(\bar{G}) = \vartheta(G).$$

В случае, если граф \bar{G} совершенен, мы можем записать следующую цепочку равенств:

$$\vartheta(G) = \chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G}) = \alpha(G). \quad (8)$$

Иными словами, в случае, если граф \bar{G} совершенен, то для графа G оказывается справедливым равенство

$$\vartheta(G) = \alpha(G).$$

Аналогично, если граф G совершенен, то справедлива цепочка равенств

$$\vartheta(\bar{G}) = \chi(G) = \omega(G) = \alpha(\bar{G}). \quad (9)$$

Согласно слабой гипотезе Бержа, граф \bar{G} является совершенным тогда и только тогда, когда является совершенным граф G . Иными словами, слабая гипотеза Бержа утверждает, что из справедливости цепочки равенств (8) следует справедливость цепочки равенств (9) и наоборот, то есть граф G совершенен тогда и только тогда, когда равносильны равенства

$$\vartheta(G) = \alpha(G) \quad \text{и} \quad \chi(G) = \omega(G).$$

Берж графы с $\vartheta(G) = \alpha(G)$ предложил называть α -совершенными графами, а графы с $\chi(G) = \omega(G)$ — γ -совершенными графами. Ловац в 1972 году доказал, таким образом, что понятие α -совершенных и γ -совершенных графов совпадают, и что любой такой граф можно просто называть совершенным графом.

8.3.3. Заметим, что любая клика K может содержать как максимум одну вершину какого-то вершинно независимого множества A . При этом некоторые клики из минимального покрытия вершин кликами могут не содержать ни одну вершину из вершинно независимого множества. Как следствие, $\vartheta(G) \geq \alpha(G)$ для любого графа G . Мы знаем также, что для любого графа $\chi(G) \geq \omega(G)$. С этой точки зрения слабая гипотеза Бержа и ее переформулировки идейно близки к многочисленным минимаксным теоремам теории графов, таким, как теорема Дилуорса, теорема Кенига и другие.

8.3.4. Для доказательства теоремы о совершенных графах нам понадобится операция *расширения* (expanding) вершины x графа G на ребро $\{x, x'\}$.



Рис. 49

Определение 8.10. Пусть x есть произвольная вершина графа G (см.рис.49,а). Операция расширения этой вершины состоит в добавлении к множеству $V(G)$ вершин графа G новой вершины x' и соединении ее со всеми вершинами y , смежными с x , а также с самой вершиной x (рис.49,б).

Лемма 8.11. Граф G' , полученный из совершенного графа G расширением произвольной вершины $x \in V(G)$, также является совершенным.

Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин совершенного графа. База индукции верна — взяв совершенный граф K_1 и расширив единственную его вершину x , мы получим граф K_2 , который также является совершенным. Пусть теперь G есть произвольный совершенный граф, построенный на $n \geq 1$ вершинах, а граф G' получен из графа G расширением произвольной вершины $x \in V(G)$ на ребро $\{x, x'\}$. Заметим, что произвольный собственный индуцированный подграф графа G' либо изоморфен G , либо получен из собственного индуцированного подграфа H графа G расширением одной из его вершин. В обоих случаях, согласно индукционному предположению, такой подграф совершенен, поэтому для доказательства леммы нам остается только доказать, что сам граф G' является совершенным. Для этого же, в свою очередь, нам достаточно убедиться в справедливости неравенства $\chi(G') \leq \omega(G')$.

В случае, когда вершина x принадлежит некоторой максимальной клике K графа G (рис.49,а), ее расширение увеличивает на единицу кликовое число графа. При этом мы всегда можем окрасить вершину x' в какой-то новый, $(\chi(G) + 1)$ -й цвет, и получить какую-то правильную окраску графа G' . Но так как $\chi(G')$ есть минимальное количество способов правильно окрасить граф G' , то мы можем записать цепочку неравенств

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G'),$$

из которой следует, что граф G' — совершенный. Нам, таким образом, остается разобраться со случаем, когда x максимальной клике не принадлежит, то есть со случаем, при котором $\omega(G') = \omega(G)$.

Мы знаем, что при окраске вершин совершенного графа G в $\chi(G) = \omega(G)$ цветов любая клика максимального размера $\omega(G)$ также окажется окрашенной ровно в $\omega(G)$ цветов. При этом каждая такая клика будет обязательно содержать вершину, окрашенную в тот же цвет i , что и вершина x . Обозначим через S подмножество вершин графа $G - x$, окрашенных в цвет i . Удаляя из графа G все вершины этого подмножества, мы получим граф $H := G - S$, в котором размер любой клики будет строго меньше $\omega(G)$:

$$\omega(G - S) < \omega(G) \quad \iff \quad \omega(G - S) + 1 \leq \omega(G).$$

Заметим теперь, что подмножество S вершин является вершинно независимым множеством в графе G . По построению, вершинно независимым является и подмножество $S \cup \{x'\}$ в графе

G' . Действительно, так как в графе G и вершина x , и вершины подмножества S окрашены в цвет i , то они попарно несмежны в G . Но тогда и вершина x' несмежна ни с одной из вершин подмножества S , а значит, $S \cup \{x'\}$ представляет собой вершинно независимое множество в G' .

Используя это обстоятельство, мы можем продолжить правильную окраску графа H на граф G' , окрасив вершины подмножества $S \cup \{x'\}$ в какой-то новый цвет, отличный от использованных при покраске графа H цветов. Но тогда для хроматического числа графа G' мы можем записать цепочку неравенств

$$\chi(G') \leq \chi(G - S) + 1 = \omega(G - S) + 1 \leq \omega(G) = \omega(G'),$$

из которой следует, что G' является совершенным графом. \square

8.3.5. Приступим к доказательству теоремы о совершенных графах. Используем индукцию по количеству n вершин для доказательства того, что дополнение \bar{G} любого совершенного графа G также совершенно. Для случая $n = 1$ утверждение тривиально. Будем предполагать, что $n \geq 2$, и что для всех графов, построенных на $n - 1$ вершине, дополнение к любому совершенному графу является совершенным графом. Сразу заметим, что любой собственный индуцированный подграф графа \bar{G} есть дополнение собственного индуцированного подграфа графа G , а следовательно, по индукционному предположению, совершенен. Поэтому для доказательства того, что \bar{G} совершенен, нам остается доказать неравенство $\chi(\bar{G}) \leq \omega(\bar{G})$.

Обозначим через K подмножество вершин, отвечающее некоторой клике в графе G , а через \mathcal{K} — множество всех таких подмножеств. Через \mathcal{A} обозначим множество всех максимальных вершинно независимых подмножеств A . Предположим, что в графе G существует подмножество $K \in \mathcal{K}$, такое, что $K \cap A \neq \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Удаляя вершины подмножества K , мы получаем, что размер произвольного вершинно независимого множества в графе $G - K$ строго меньше $\alpha(G)$. Но так как $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$, то из неравенства $\alpha(\bar{G} - K) < \alpha(G)$ следует неравенство

$$\omega(\bar{G} - K) < \omega(\bar{G}) \iff \omega(\bar{G} - K) + 1 \leq \omega(\bar{G}).$$

Раскрасим теперь граф $\bar{G} - K$ в $\omega(\bar{G} - K) = \chi(\bar{G} - K)$ цветов. Так как вершины любой клики K в графе G являются вершинами какого-то вершинно независимого множества в графе \bar{G} , то мы можем продолжить правильную раскраску графа $\bar{G} - K$ на граф \bar{G} , окрасив вершины подмножества K в цвет $\chi(\bar{G} - K) + 1$. При этом хроматическое число $\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - K) + 1$ как минимальное количество цветов, требующихся для правильной окраски графа \bar{G} . Таким образом, окончательно мы получаем, что

$$\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - K) + 1 = \omega(\bar{G} - K) + 1 \leq \omega(\bar{G}),$$

откуда и следует, что $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, то есть что граф \bar{G} совершенен.

8.3.6. Итак, нам нужно доказать, что в совершенном графе G описанная выше клика K обязательно найдется. Предположим противное, а именно, будем считать, что для любого $K_r \in \mathcal{K}$ существует вершинно независимое множество $A_r \in \mathcal{A}$ мощности $\alpha(G)$, такое, что $K_r \cap A_r = \emptyset$. Проблема состоит в том, что мы мало что можем сказать о структуре произвольного совершенного графа G , обладающего данным свойством. Вместо этого Ласло Ловац предложил определить новый граф, структура которого будет лучше подходить для доказательства невозможности подобного рода ситуации.

Именно, сопоставим множеству $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_t\}$ равное ему по мощности множество $\mathcal{A}_K = \{A_1, \dots, A_t\}$ максимальных вершинно независимых подмножеств A_i , таких, что для любого

$i \in \{1, \dots, t\}$, пересечение $K_i \cap A_i = \emptyset$. В силу сделанного выше предположения для любого K_i такое подмножество A_i обязательно найдется. Сосчитаем теперь для любой вершины $x \in V(G)$ количество $k(x)$ вершинно независимых множеств A_i , содержащих эту вершину. В принципе, в графе G могут существовать вершины, которые не входят ни в одно максимальное вершинно независимое множество (например, центральная вершина графа “звезда”). Для таких вершин число $k(x)$ гарантированно равно нулю. Кроме того, в графе G могут найтись и другие вершины, для которых $k(x) = 0$. Нас же будут интересовать лишь те вершины x , для которых $k(x) > 0$. Так как G совершенен, то совершенным является и подграф H , индуцированный всеми этими вершинами.

Образум из графа H граф H' заменой в H любой вершины $x \in S$ на клику Q_x размера $k(x)$. При этом предполагается, что вершины $u \in V(Q_x)$ и $v \in V(Q_y)$ в графе H' соединены между собой ребром либо в случае, если $x = y$, либо в случае, если x и y соединены между собой ребром в исходном подграфе H . Заметим, что граф H' может быть получен из H последовательным расширением вершин. Следовательно, согласно доказанной выше лемме, граф H' также является совершенным, а значит, $\omega(H') = \chi(H')$. Кроме того, по построению, $\alpha(H') = \alpha(H)$.

Сосчитаем теперь $\omega(H')$ и $\chi(H')$ из других соображений. По построению H' , любой максимальный полный подграф Q' графа H' образован из некоторого полного подграфа Q графа H (одновременно являющегося полным подграфом графа G), расширением его вершин $x \in V(Q)$. Иными словами, существует такое r , что $K_r = V(Q)$ и

$$|V(Q')| = \omega(H') = \sum_{x \in K_r} k(x).$$

Заметим теперь, что по определению $k(x)$,

$$k(x) = \sum_{A_i \ni x} 1,$$

где A_i есть максимальные вершинно независимые множества, содержащие x , и поэтому

$$\omega(H') = \sum_{x \in K_r} \sum_{A_i \ni x} 1 = \sum_{i=1}^t |K_r \cap A_i|,$$

так как при фиксированном i количество единиц под суммой совпадает с количеством вершин x , принадлежащих одновременно K_r и A_i . Но мы знаем, что любая клика пересекается с любым вершинно независимым множеством может максимум по одной вершине, так что $|K_r \cap A_i| \leq 1$ для любых $i, r \in [t]$. Кроме того, в случае $i = r$ пересечение $K_r \cap A_r = \emptyset$, так что одно из слагаемых в выписанной выше сумме гарантированно равно нулю. Поэтому мы можем утверждать, что

$$\omega(H') \leq t - 1.$$

С другой же стороны,

$$n' := |V(H')| = \sum_{x \in V(G)} k(x) = \sum_{x \in V(G)} \sum_{A_i \ni x} 1 = \sum_{i=1}^t |V(G) \cap A_i| = \sum_{i=1}^t |A_i| = t \cdot \alpha(G).$$

Но мы знаем (смотри (??)), что $\chi(H') \geq n'/\alpha(H') = n'/\alpha(H)$. Кроме того, так как H есть индуцированный подграф графа G , то любое вершинно независимое множество в H представляет

собой одновременно некоторое вершинно независимое множество в G . Поэтому $\alpha(H) \leq \alpha(G)$, и

$$\chi(H') \geq \frac{n'}{\alpha(H)} \geq \frac{n'}{\alpha(G)} = \frac{t \cdot \alpha(G)}{\alpha(G)} = t \quad \implies \quad \chi(H') > \omega(H').$$

Но это противоречит тому, что H' является совершенным. Полученное противоречие доказывает теорему о совершенных графах. \square

8.3.7. Совершенство того или иного графа крайне важна с точки зрения описания свойств такого графа. Так, например, задача проверки совершенных графов на k -раскрашиваемость может быть решена за полиномиальное время. То же можно сказать и про некоторые другие алгоритмические задачи теории графов, такие, как поиск максимальной клики в графе, максимального вершинно независимого множества, и так далее.

Многие фундаментальные классы графов являются совершенными. Простейшими примерами таких графов являются полные графы, а также двудольные графы (смотри упражнение ??). Еще один важный пример совершенных графов, часто встречающихся в приложениях — так называемые *интервальные графы*, описанные в упражнении ?. Совершенство так называемых *графов сравнимости* (упражнение ??) эквивалентна двум важнейшим теоремам теории частично упорядоченных множеств — теореме Мирского и теореме Дилуорса. Наконец, совершенными являются так называемые *хордальные графы*, о которых мы подробно поговорим в параграфе, посвященном хроматическим полиномам графа G .

9 Реберная раскраска графов

9.1. Перейдем теперь к так называемым *реберным раскраскам* уже не обязательно простого графа G в k цветов.

9.1.1. Формальные определения здесь практически буквально перефразируют соответствующие определения в случае раскраски вершин. Так, правильная реберная раскраска — это такая раскраска, при которой любые ребра, инцидентные одной и той же вершине, окрашены в разные цвета. Минимальное количество цветов, в которые можно правильно окрасить ребра графа G , называется реберным хроматическим числом $\chi'(G)$.

Очевидно, что правильно раскрасить петлю в графе невозможно. Поэтому в задачах, связанных с реберной окраской графов, мы будем рассматривать мультиграфы, петли в которых отсутствуют.

9.1.2. Приведем достаточно характерный пример практической задачи, сводящиеся к поиску правильной реберной раскраски графа G — так называемой задачи планирования соревнований.

Предположим, что имеется n различных команд, участвующих в некотором спортивном турнире. Для любой пары команд нам известно, должны ли они играть между собой в данном сезоне. Предположим также, что любая команда может провести лишь одну игру в неделю. Задача состоит в минимизации времени проведения соревнований.

Для формализации данной задачи можно рассмотреть граф, построенный на n вершинах. Ребро между парой вершин проводится в случае, если соответствующие команды должны сыграть между собой в данном сезоне. Все ребра, отвечающие играм на одной и той же неделе, окраши-

ваются в один и тот же цвет. Наша задача состоит в построении правильной реберной окраски данного графа в наименьшее количество цветов.

9.1.3. Задача реберной окраски графа тесно связана с задачей построения в нем паросочетания. Действительно, любое подмножество ребер, окрашенных в один и тот же цвет, формирует некоторое паросочетание в графе G . Следовательно, любая правильная реберная раскраска в k цветов задает нам разбиение $\{E_1, \dots, E_k\}$ множества $E(G)$ ребер графа G на k блоков, каждый из которых представляет собой некоторое паросочетание. При этом количество цветов, необходимых для правильной окраски m ребер графа, ограничено снизу величиной

$$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)},$$

где $\alpha'(G)$ есть количество ребер в максимальном паросочетании, m — количество ребер в графе.

Далее, при правильной реберной раскраске все ребра, инцидентные одной и той же вершине, должны быть окрашены в разные цвета. Это дает еще одну очевидную нижнюю оценку на реберное хроматическое число $\chi'(G)$:

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \tag{10}$$

9.1.4. Еще в 1916 году Кёниг показал, что в любом двудольном графе оценка (10) достигается.

Теорема 9.1 (König, 1916). *В двудольном графе $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Доказательство. Мы знаем, что любой k -регулярный двудольный граф допускает декомпозицию на k совершенных паросочетаний, то есть он реберно k -раскрашиваем. Покажем теперь, что любой двудольный граф $G[X, Y]$ с $\Delta(G) = k$ является подграфом k -регулярного двудольного графа G' . В этом случае, очевидно, правильная реберная раскраска графа G' даст нам правильную реберную раскраску и графа G .

Предположим вначале, что $|X| < |Y|$. В этом случае нам нужно добавить $|Y| - |X|$ вершин в блок X так, чтобы количество вершин в каждой доле стало одинаковым. Теперь предположим, что в двудольном графе $G[X, Y]$ с $|X| = |Y|$ нашлась вершина $x \in X$, степень которой меньше k . В этом случае обязательно найдется и вершина $y \in Y$ со степенью $\deg(y) < k$. Действительно, в противном случае степень любой вершины $y \in Y$ равна k , и из условия $\deg(x) < k$ следует, что в X существует вершина x' со степенью $\deg(x') > k$, что невозможно. Соединяя все такие пары вершин ребрами, мы в конце концов получим k -регулярный надграф G' двудольного графа $G[X, Y]$. \square

9.2. Поговорим теперь о верхних оценках на реберное хроматическое число. Оказывается, что в отличие от раскраски вершин, для $\chi'(G)$ существуют удивительно точные оценки.

9.2.1. Рассмотрим вначале простые графы. В 1964 году Визинг и независимо от него в 1966 году Гупта установили, что у таких графов имеется всего две возможности — их хроматическое число может быть равно либо $\Delta(G)$, либо $\Delta(G) + 1$. Именно, справедлива следующая

Теорема 9.2 (Визинг, 1964; Гупта, 1966). *Пусть G есть простой граф, построенный на n вершинах. Тогда*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

где $\Delta(G)$ есть максимальная из степеней вершин графа G .

Доказательство. Предположим, что ребра графа G невозможно окрасить в $\Delta(G) + 1$ цвет. Выберем в G подграф H с максимально возможным количеством ребер, который допускает такую реберную окраску. Мы придем к противоречию, если нам удастся построить подграф H' , имеющий на одно ребро больше, чем H , который также можно реберно окрасить в $\Delta(G) + 1$ цвет.

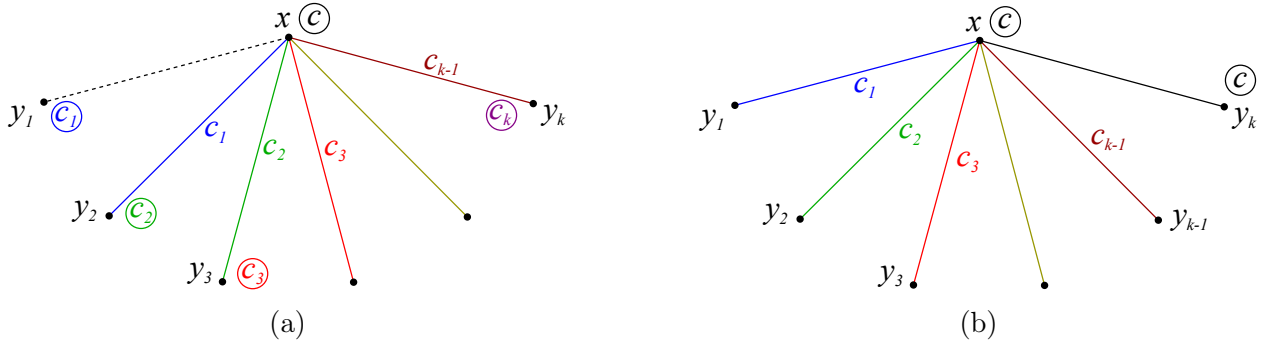


Рис. 50

Согласно нашему предположению, в графе G существует ребро $\{x, y_1\} \notin E(H)$ (рис.50,а). Так как количество цветов, использованных при окраске ребер подграфа H , превосходит максимальную степень вершины $\Delta(G)$, то для вершины x найдется хотя бы один цвет c , не встречающийся при окраске инцидентных с x ребер, входящих в H . Мы будем говорить, что такой цвет не представлен в x (см. рис.50,а, на котором цвет c , не представленный в x , обведен в кружок). По тем же причинам, в вершине y_1 не представлен некоторый цвет c_1 . Если этот цвет c_1 совпадает с c , то нам повезло — в этом случае мы просто добавляем к подграфу H ребро $\{x, y_1\}$, окрашенное в цвет c , и получаем правильную окраску подграфа $H' := H \cup \{x, y_1\}$. Ровно к тому же результату мы приходим и в случае, если $c_1 \neq c$, но в вершине x наряду с c не представлен и цвет c_1 . В этом случае мы можем окрасить ребро $\{x, y_1\}$ в цвет c_1 и получить правильную окраску H' .

Теперь предположим, что $c_1 \neq c$, а в подграфе H имеется ребро $\{x, y_2\}$, окрашенное в цвет c_1 (рис.50,а). В вершине y_2 не представлен цвет c_2 . В случае, если либо $c_2 = c$, либо $c_2 \neq c$, но в x не представлен цвет c_2 , то мы можем перекрасить ребро $\{x, y_2\}$ в цвет c_2 , а ребро $\{x, y_1\}$ окрасить в цвет c_1 . В результате получим правильную окраску подграфа $H' = H \cup \{x, y_1\}$. Если же $c_2 \neq c$, и в вершине x присутствует цвет c , то в подграфе H найдется ребро $\{x, y_3\}$, окрашенное в цвет c_2 .

Давайте опишем общий, k -й, шаг алгоритма, $k \geq 3$. Предположим, что на этом шаге мы пришли к ребру $\{x, y_k\}$, окрашенному в цвет c_{k-1} . При этом ребра

$$\{x, y_2\}, \dots, \{x, y_{k-1}\},$$

окрашены у нас в попарно различные цвета $c_i, i = 1, \dots, k - 2$, а цвет $c_i \neq c$ не представлен в вершине $y_i, i \in [1, \dots, k - 1]$. В случае, если не представленный в вершине y_k цвет c_k совпадает с c , или в случае, когда в вершине x не представлен цвет $c_k \neq c$, мы можем перекрасить ребро $\{x, y_k\}$ в цвет c_k , а оставшиеся ребра $\{x, y_i\}, i \in [1, k - 1]$, перекрасить в цвета c_{i-1} (мы такую операцию будем называть операцией сдвига цвета ребер) (рис.50,б). Если при этом k совпадет с $\deg(x)$, то наш алгоритм закончит свою работу, окрасив подграф $H \cup \{x, y_k\}$ в $\Delta(G) + 1$ цвет. Однако этот алгоритм в случае $k \geq 3$ может закончиться значительно раньше.

Именно, на одном из шагов этого алгоритма может оказаться так, что не представленный в вершине y_k цвет $c_k \neq c$ совпадет с одним из ранее встретившихся цветов $c_j, j < k - 1$, то

есть цвет $c_k = c_j$ уже окажется представленным в вершине x . Например, не представленный в вершине y_k цвет c_k может совпасть с не представленным в вершине y_3 цветом c_3 (рис.50,а).

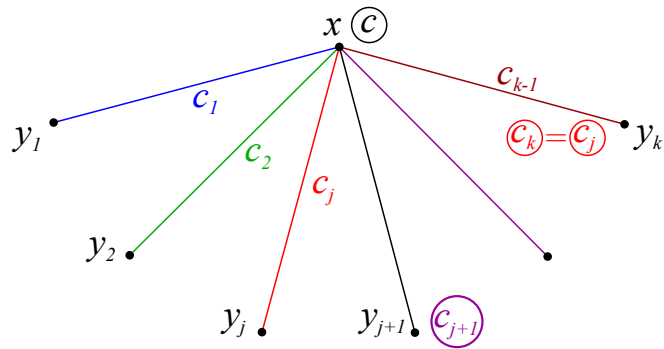


Рис. 51

В этом случае сдвинем цвета c_1, \dots, c_j , окрасив ребра $\{x, y_i\}$ в цвета $c_i, i = 1, \dots, j$, и оставим ребро $\{x, y_{j+1}\}$ неокрашенным (см. рис.51). Введем граф $S := H \cup \{x, y_1\} \setminus \{x, y_{j+1}\}$, имеющий одинаковое количество ребер с H , и рассмотрим в нем подграф S_{c,c_j} , индуцированный ребрами, окрашенными либо в цвет c , либо в цвет c_j . Каждая компонента такого подграфа представляет собой либо цикл четной длины, либо путь, в котором ребра разных цветов чередуются друг с другом. Покажем, что в подграфе S_{c,c_j} вершины y_{j+1}, y_k и x имеют степень, равную единице, а значит, не могут лежать в одной и той же компоненте связности S_{c,c_j} .

Действительно, цвет c представлен в каждой вершине $y_i, i = 1, \dots, k$, и, в частности, в вершинах y_{j+1} и y_k . Однако мы только что сдвинули цвет c_j с вершины y_{j+1} , так что в этой вершине цвет c_j уже не присутствует. Не присутствует цвет $c_j = c_k$ также и в вершине y_k . Наконец, в вершине x представлен цвет c_j , но не представлен цвет c .

Разберем вначале случай, когда x и y_{j+1} лежат в различных компонентах связности S_{c,c_j} . Поменяем тогда цвета c и c_j в компоненте, содержащей вершину y_{j+1} . После этой операции цвет c не будет присутствовать ни в x , ни в y_{j+1} . Окрашивая ребро $\{x, y_{j+1}\}$ в цвет c , мы получаем правильную реберную окраску графа $S \cup \{x, y_{j+1}\}$.

Теперь предположим, что вершины x и y_{j+1} лежат в одной компоненте связности S_{c,c_j} . Тогда, как мы уже заметили, вершина y_k лежит в отличной от этих двух вершин компоненте связности S_{c,c_j} . Поменяв в компоненте, содержащей y_k , цвета c и c_j , а затем сдвинув цвета с ребер $\{x, y_{i+1}\}$ на ребра $\{x, y_i\}, i = j+2, \dots, k-1$, мы сможем окрасить ребро $\{x, y_k\}$ в цвет c и вновь получить правильную реберную окраску графа $S \cup \{x, y_{j+1}\}$. □

9.2.2. Доказанную выше теорему можно обобщить на случай графа G с мультиребрами. Именно, обозначим через $\mu(x, y)$ количество ребер, соединяющих вершины x и y , а через $\mu(G)$ — максимальное среди всех чисел $\mu(x, y)$.

Теорема 9.3 (Визинг, 1964; Гупта, 1966). Для произвольного графа G с мультиребрами

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G).$$

Следствие 9.4 (Шеннон, 1949). Для произвольного графа G с мультиребрами

$$\chi'(G) \leq (3/2) \cdot \Delta(G).$$

10 Хроматический многочлен графа

10.1. В заключение данной главы мы поговорим об одном из центральных объектов как современной алгебраической теории графов, так и современной перечислительной комбинаторики — о так называемом хроматическом многочлене графа G .

10.1.1. Сопоставим любому целому неотрицательному k количество $P_G(k)$ способов правильно окрасить вершины графа G в k цветов. Давайте поймем, чему может быть равно число $P_G(k)$ для различных значений k .

Мы знаем, что минимальное количество цветов, в которое можно правильно окрасить вершины заданного графа G , равно $\chi(G)$. Следовательно, $P_G(k)$ должно равняться нулю для всех k от 0 до $\chi(G) - 1$. В случае же $k \geq \chi(G)$ мы любой граф конечным числом способов можем правильно окрасить в k цветов, поэтому для таких k значение $P_G(k)$ должно быть строго больше нуля.

В качестве примера рассмотрим граф $G = K_3$ (рис.). Мы знаем, что хроматическое число такого графа равно трем. Следовательно, $P_{K_3}(0) = P_{K_3}(1) = P_{K_3}(2) = 0$. Далее, при $k = \chi(K_3) = 3$ значение $P_{K_3}(3) = 6$. Действительно, вершину 1 графа мы можем окрасить в любой из трех цветов, соседнюю с ней вершину 2 — в любой из оставшихся двух цветов. Цвет же третьей вершины определяется уже однозначно. Следовательно, $P_{K_3}(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Аналогичные рассуждения проходят и для любого $k > \chi(K_3)$. Действительно, первую вершину мы можем окрасить в любой из k цветов, вторую — в $k - 1$ цветов, а третью — в любой из оставшихся $(k - 2)$ -х цветов. Поэтому

$$P_{K_3}(k) = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \quad \text{для всех } k \geq \chi(K_3).$$

Заметим теперь, что данная формула годится и для всех $k = 0, \dots, \chi(K_3) - 1$. Действительно, для этих значений $P_{K_3}(k)$ обращается в ноль, что нам, собственно, и нужно. Эти соображения и приводят нас к следующему определению.

Определение 10.1. Хроматическим многочленом $P_G(z)$ называется функция, принимающая в точках $k = 0, 1, 2, \dots$ значения $P_G(k)$, равные количеству правильных окрасок вершин графа G в k цветов.

В частности, мы показали, что для графа $G = K_3$ функция $P_{K_3}(z) = z \cdot (z - 1) \cdot (z - 2)$.

10.1.2. Приведем еще некоторые простые примеры хроматических многочленов.

Пример 10.2. Несложно обобщить подробно разобранный выше пример на случай произвольного полного графа K_n — для такого графа функция $P_{K_n}(z)$ равна

$$P_{K_n}(z) = z(z - 1) \dots (z - n + 1). \quad (11)$$

Действительно, при фиксированном $z = k$, $k = n, n + 1, \dots$, первую вершину графа можно покрасить в любой из k цветов, вторую — в любой из оставшихся $k - 1$ цветов и так далее. Заметим, что при этом, как и следовало ожидать, $P_{K_n}(k) = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Пример 10.3. Хроматический многочлен для пустого графа $G = \bar{K}_n$, построенного на n вершинах, равен

$$P_{\bar{K}_n}(z) = z^n. \quad (12)$$

Это следует из того, что для любого $k > 0$ любую вершину мы можем окрасить в любой из k цветов независимо от цвета остальных вершин.

Пример 10.4. Наконец, хроматический многочлен для дерева T_n имеет вид

$$P_{T_n}(z) = z(z-1)^{n-1}. \quad (13)$$

Действительно, в один цвет правильно мы можем окрасить только дерево T_1 , построенное на одной вершине. В случае $n > 1$ нам необходимо как минимум два цвета для правильной окраски вершин дерева T_n . При этом любую произвольно выбранную вершину x дерева мы можем окрасить в любой из $k \geq 1$ цветов, а любую смежную с ней вершину y — в любой из оставшихся $k - 1$ цветов (рис.). При этом еще не окрашенную смежную к вершине y вершину z мы вновь можем покрасить в один из $k - 1$ цветов — вершины x и z в дереве не смежны, и потому мы можем, в частности, использовать и цвет, в который окрашена вершина x , для окраски вершины z .

10.1.3. Во всех вышеприведенных примерах $P_G(z)$ действительно является полиномом, причем степень этого полинома совпадает с количеством n вершин графа G . Оказывается, данный факт справедлив и в общем случае. Именно, справедлива

Теорема 10.5. *Для любого графа G , построенного на n вершинах, функция $P_G(z)$ представляет собой полином степени n с целыми коэффициентами, причем коэффициент при z^n всегда равен единице, а знаки коэффициентов при остальных степенях чередуются.*

Для доказательства данной теоремы нам понадобится одна лемма, которая сама по себе очень полезна для вычисления конкретных функций $P_G(z)$. Рассмотрим произвольный граф G , в котором вершины 1 и 2 соединены ребром $e = \{1, 2\}$ (рис.). Образует из этого графа два других графа — граф $G - e$, полученный из G удалением ребра e , а также граф $G \setminus e$, полученный из G стягиванием ребра e в общую вершину $1 \equiv 2$ (рис.).

Лемма 10.6. *Хроматические многочлены графов G , $G - e$ и $G \setminus e$ связаны следующим соотношением:*

$$P_{G-e}(z) = P_G(z) + P_{G \setminus e}(z). \quad (14)$$

Доказательство. Действительно, все правильные раскраски графа $G - e$ можно разбить на два блока. В первый блок входят раскраски, в которых вершины 1 и 2 окрашены в один цвет, а во второй — раскраски, в которых данная пара вершин окрашена в разные цвета. Количество окрасок первого типа описывается функцией $P_{G \setminus e}(z)$, а количество окрасок второго типа — функцией $P_G(z)$. \square

10.1.4. Перейдем теперь к доказательству теоремы 10.5. Нам нужно доказать, что для любого графа G с $|V(G)| = n$ хроматический многочлен $P_G(z)$ равен

$$P_G(z) = 1 \cdot z^n - c_{n-1} \cdot z^{n-1} + c_{n-2} \cdot z^{n-2} - \dots + (-1)^n c_0, \quad c_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i = 0, \dots, n-1.$$

Будем доказывать этот факт индукцией по количеству вершин и количеству ребер графа, считая, что утверждение, доказываемое для графа G на n вершинах, верно для всех графов, построенных на меньшем количестве вершин, а также для всех графов на n вершинах, с меньшим, чем у G , количеством ребер. База индукции верна — для пустого графа \bar{K}_n хроматический полином $P_{\bar{K}_n}$, рассчитываемый по формуле (12), удовлетворяет всем утверждениям теоремы.

Воспользуемся теперь доказанной выше леммой. В соответствии с рекуррентным соотношением (14),

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G \setminus e}(z).$$

Но в графе $G - e$ ребер на единицу меньше, чем у G , а в графе $G \setminus e$ по сравнению с исходным графом G на единицу меньше вершин и на единицу меньше ребер. Следовательно, для этих графов все утверждения теоремы выполнены, то есть

$$P_{G-e}(z) = z^n - a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z}_+,$$

$$P_{G \setminus e}(z) = z^{n-1} - b_{n-2}z^{n-2} + b_{n-3}z^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} b_0, \quad b_j \in \mathbb{Z}_+.$$

Как следствие, хроматический полином для G записывается в виде

$$P_G(z) = z^n - (a_{n-1} + 1)z^{n-1} + (a_{n-2} + b_{n-2})z^{n-2} - \dots + (-1)^n(a_0 + b_0),$$

то есть удовлетворяет всем утверждениям теоремы. □

10.1.5. Из доказательства теоремы, в частности, следует, что добавление к графу ребра увеличивает коэффициент a_{n-1} полинома $P_G(z)$ на единицу. Иными словами, справедливо

Следствие 10.7. *Абсолютное значение коэффициента при z^{n-1} в полиноме $P_n(z)$ совпадает с количеством $|E(G)|$ ребер в графе G .*

10.1.6. Столь же очевидно и следующее утверждение.

Теорема 10.8. *Пусть $\{G_1, \dots, G_m\}$ есть множество односвязных компонент графа G . Тогда*

$$P_G(z) = P_{G_1}(z) \cdot \dots \cdot P_{G_m}(z).$$

Действительно, любую компоненту связности G_i графа G мы можем правильно окрасить в k цветов независимо от оставшихся компонент связности графа G . Следовательно, по правилу произведения в комбинаторике, общее количество способов правильной окраски вершин графа G равно произведению количества способов правильной окраски вершин в каждой из связных компонент графа G .

10.1.7. Как видно из формулы (12), число $k = 0$ является корнем кратности n для хроматического многочлена $P_{\bar{K}_n}(z)$ пустого графа. Оказывается, данный факт есть следствие следующего более общего утверждения.

Теорема 10.9. *Число $k = 0$ является корнем хроматического многочлена $P_G(z)$ графа G кратности, равной количеству компонент связности графа G .*

Доказательство. То, что $k = 0$ является корнем любого хроматического многочлена, следует из определения $P_G(z)$: раскраски графа в ноль цветов не бывает. В силу теоремы 10.8, достаточно доказать, что для любого связного графа ноль есть корень единичной кратности $P_G(z)$. Обычно это делается по индукции по количеству вершин в графе. Подробности доказательства, равно как и другие интересные факты, связанные с корнями хроматического полинома, можно посмотреть, например, в [?].

Заметим в заключение, что изучение корней хроматического многочлена и было основным мотивом введения этого объекта в теорию графов. Эти полиномы были изначально введены в 1913 году для планарных графов Джорджем Биркхофом в одной из многочисленных попыток решения проблемы четырех красок. Если бы удалось доказать, что для всех таких графов $P_G(z) > 0$ для всех $z \geq 4$, то данная проблема была бы решена.

10.2. Для одного крайне важного класса графов вычисление хроматического многочлена можно существенным образом упростить.

10.2.1. Заметим, что хроматические полиномы деревьев и полных графов имеют весьма специфическую структуру. Для того, чтобы понять, в чем состоит эта специфика, нам понадобятся следующие определения.

Определение 10.10. Вершина x графа G называется симплициарной, если все ее соседние вершины в графе G индуцируют клику в этом графе.

Определение 10.11. Нумерацией в порядке исключения симплициарных вершин называется такая нумерация $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ вершин, при которой каждая вершина x_i является симплициарной для подграфа G_i , индуцированного вершинами x_1, x_2, \dots, x_i .

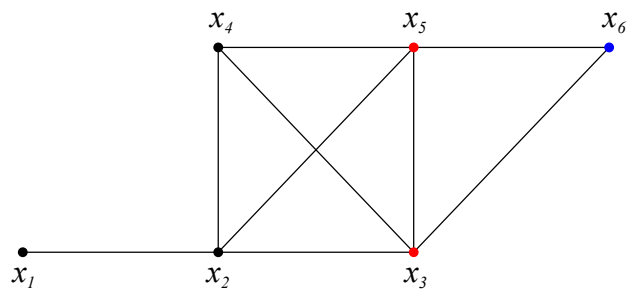


Рис. 52

Пример 10.12. В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис.52. Нумерацией в порядке исключения симплициарных вершин такого графа является нумерация вида x_6, x_5, \dots, x_1 . Действительно, вершина x_6 (синяя вершина на рис.52,а) является симплициарной для графа G — ее соседи (вершины x_5 и x_3 , помеченные красным на рис.52,а) образуют в G подграф, изоморфный K_2 . В графе $G - x_6$, полученным в результате удаления вершины x_6 , вершина x_5 также является симплициарной (см.рис.52,б) — смежные с ней вершины x_2, x_3, x_4 образуют в графе $G - x_6$ клику, изоморфную K_3 . Продолжая далее, мы в итоге придем к графу, индуцированному вершинами x_1 и x_2 . Удаление x_2 даст нам граф, состоящий из единственной вершины x_1 .

10.2.2. В случае, когда граф G допускает нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин, мы можем легко подсчитать хроматический многочлен $P_G(z)$. Действительно, пусть $\tilde{N}(x_i)$ есть количество вершин, смежных с вершиной x_i в подграфе G_i , индуцированном подмножеством вершин $\{x_1, \dots, x_i\}$, $\tilde{d}_i = |\tilde{N}(x_i)|$. Так как подмножество $\tilde{N}(x_i)$ индуцирует клику в подграфе G_i , то при окраске смежных с x_i вершин подграфа H мы гарантированно использовали \tilde{d}_i цветов. Следовательно, саму вершину x_i мы можем при любом фиксированном $z = k \in \mathbb{N}$ окрасить $k - \tilde{d}_i$ способами вне зависимости от способа окраски вершин $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Но тогда, согласно комбинаторному правилу произведения,

$$P_{G_i}(z) = P_{G_i - x_i}(z) \cdot (z - \tilde{d}_i).$$

Иными словами, хроматический полином в рассматриваемом графе G представляет собой произведение линейных сомножителей вида $z - \tilde{d}_i$, причем этот полином можно строить пошагово, начиная с вершины x_1 .

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис.52. Хроматический полином такого графа мы можем строить, начиная с вершины x_1 . Так как значения \tilde{d}_i получающихся подграфов равны

$$\tilde{d}_0 = 0, \quad \tilde{d}_1 = 1, \quad \tilde{d}_2 = 1, \quad \tilde{d}_3 = 2, \quad \tilde{d}_4 = 3, \quad \tilde{d}_5 = 2,$$

то хроматический полином $P_G(z)$ для данного графа имеет вид

$$P_G(z) = z \cdot (z - 1) \cdot (z - 1) \cdot (z - 2) \cdot (z - 3) \cdot (z - 2) = z \cdot (z - 1)^2 \cdot (z - 2)^2 \cdot (z - 3).$$

10.2.3. Оказывается, что все графы, допускающие нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин, являются так называемыми *хордальными графами* (chordal graphs).

Определение 10.13. Хордой цикла C в графе G называется такое ребро e , концевые вершины которого лежат на цикле. При этом само ребро циклу не принадлежит.

Определение 10.14. Индуцированным циклом в графе G называется цикл C длины, большей трех, не имеющий хорд. Иными словами, такой цикл является индуцированным подграфом исходного графа G .

Определение 10.15. Простой граф G называется хордальным в случае, если в нем отсутствуют индуцированные циклы.

Теорема 10.16 (Dirac, 1961). *Простой граф допускает нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин тогда и только тогда, когда он является хордальным графом.*

Доказательство. То, что любой граф G , допускающий нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин, является хордальным, достаточно очевидно. Действительно, предположим, что мы в процессе удаления симплициарных вершин дошли до вершины $x \in V(C)$, принадлежащей некоторому циклу C в графе G . По условию, смежные с x вершины должны образовывать клику в соответствующем графе. Эта клика обязана включать соседей x по циклу C . Как следствие, эти соседи соединены между собой ребром. Это ребро, в свою очередь, представляет собой хорду для цикла C . Иными словами, в графе G индуцированные циклы отсутствуют.

Для доказательства обратного утверждения достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 10.17. *Для любой вершины x в хордальном графе G найдется симплициарная вершина среди всех вершин, находящихся на максимальном расстоянии от x .*

Следствием леммы (10.17) является тот факт, что в хордальном графе обязательно существует симплициарная вершина y . Так как любой подграф хордального графа хордален, то далее индукцией по n можно достаточно просто показать, что хордальный граф допускает нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин.

10.2.4. Проведем доказательство леммы 10.17 индукцией по количеству n вершин графа G . Случай $n = 1$ очевиден — единственная вершина графа K_1 симплициарна.

Предположим теперь, что $n \geq 2$ и рассмотрим два случая. Первый из них описывает ситуацию, когда x смежна со всеми вершинами графа $G - x$, то есть находится от них на одинаковом расстоянии, равном единице. По индукционному предположению, в графе $G - x$ существует симплициарная вершина y . По определению это означает, что вершины $N(y)$ образуют клику в графе $G - x$. Но так как x смежна со всеми вершинами графа $G - x$, то $N(y) \cup x$ образуют клику в графе G . Следовательно, y является симплициарной вершиной в G .

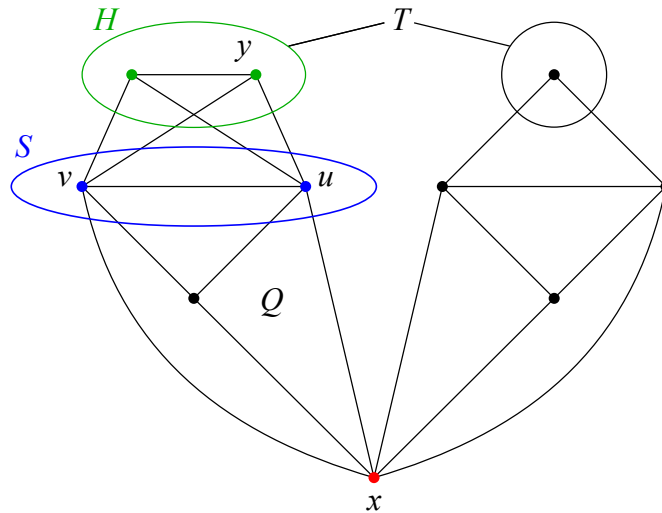


Рис. 53

Во втором случае рассмотрим подмножество T вершин, находящихся на максимальном расстоянии от x . Подграф $G[T]$ может состоять из нескольких компонент связности (рис.53). Обозначим одну из этих компонент через H (зеленые вершины на рис.53). Через S же мы обозначим подмножество вершин в $G - T$, смежных с вершинами из H (синие вершины на рис.53). Наконец, через Q мы обозначим компоненту связности графа $G - S$, содержащую x . Покажем, что S представляет собой клику в графе G .

Заметим, что любая вершина $u \in S$ имеет соседей как в H , так и в Q . Выберем еще какую-то вершину $v \in S$, $v \neq u$, и рассмотрим кратчайший путь из u в v через H , а также кратчайший путь из u в v через Q . Объединение этих путей представляет собой простой цикл длины, большей или равной четырем. В этом цикле обязаны присутствовать хорды. Но так как ребра между H и Q отсутствуют, то единственной возможной хордой в таком цикле является ребро $\{u, v\}$. Иными словами, вершины u и v в графе G смежны. Так как мы эти две вершины выбрали в S произвольно, то любая пара вершин в S соединена ребром, то есть S представляет собой клику в графе G .

Теперь рассмотрим граф G' , индуцированный подмножеством вершин $S \cup V(H)$. По индукционному предположению, для любой вершины $u \in S$ найдется симплициарная вершина y среди вершин, находящихся на максимальном расстоянии от u . Так как все вершины из $S - u$ смежны с u , то в случае, когда G' не является кликой, такая вершина y обязательно будет принадлежать $V(H)$. Если же G' является кликой, все ее вершины симплициарны, и мы в качестве y можем взять какую-то вершину из $V(H)$. Теперь заметим, что смежные с y вершины в исходном графе G обязательно принадлежат подмножеству $V(G')$. Следовательно, y является симплициарной вершиной и в графе G , причем эта вершина находится на максимальном расстоянии от x . \square

10.2.5. Оказывается, что хордальные графы являются одновременно и совершенными графами.

Теорема 10.18 (Berge, 1960). *Хордальные графы совершенны.*

Планарные графы

11 Планарные графы и их основные свойства

11.1. Мы уже привыкли изображать графы (как простые, так и мультиграфы) с помощью рисунков на плоскости. На этих рисунках вершины изображаются точками, а ребра — соединяющими эти точки отрезками кривых. Обычно нам хочется нарисовать граф как можно проще, избежав излишних пересечений ребер графа. В идеале хочется изобразить граф на плоскости так, чтобы отрезки кривых, изображающих ребра графа, пересекались только лишь в точках, изображающих его вершины. В этой связи мы можем дать следующее

Определение 11.1. Планарным графом называется граф G , который можно нарисовать на плоскости так, чтобы изображающие его ребра отрезки кривых пересекались лишь в точках, изображающих вершины графа G . Такой способ изображения графа на плоскости называется *правильным вложением* графа G в плоскость, а само изображение — *плоским графом* \tilde{G} . Изображающие ребра графа G отрезки кривых на плоскости называются ребрами плоского графа \tilde{G} , а точки, изображающие вершины графа G — вершинами плоского графа \tilde{G} .

Из данного определения следует, в частности, что все множество графов разбивается на два блока — планарные графы, а также графы, планарными не являющиеся. Давайте в этой связи рассмотрим несколько характерных примеров.

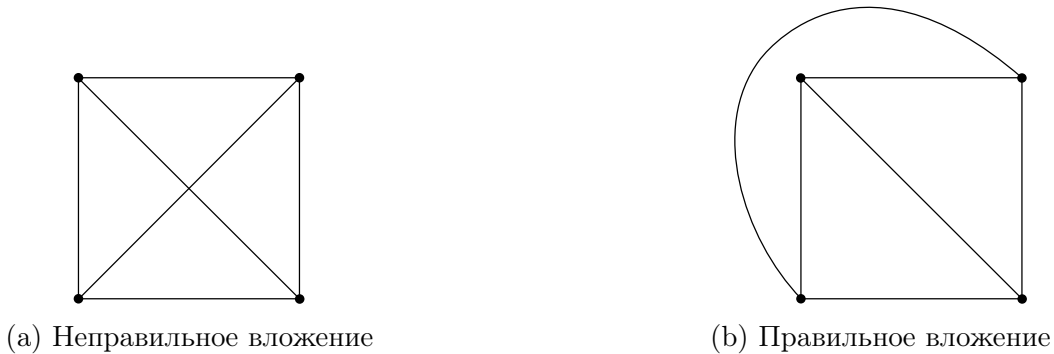


Рис. 54: Различные вложения K_4 в плоскость

11.1.1. На рис.67,а показан хорошо нам знакомый полный граф K_4 , построенный на четырех вершинах. Такое вложение графа в плоскость правильным, однако, не является — соединяющие противоположные вершины ребра $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ пересекаются друг с другом в точке, отличной от вершин графа K_4 . Данную укладку легко, конечно же, подправить и сделать правильной, нарисовав одно из этих ребер вне квадрата, соединяющего вершины графа K_4 (рис.67,б).

11.1.2. Перейдем теперь к графам, которые планарными не являются. Простейшими, и в то же время самыми важными примерами непланарных графов являются графы K_5 и $K_{3,3}$. При этом граф K_5 является минимальным по количеству вершин непланарным графом, а граф $K_{3,3}$ — минимальным по количеству ребер непланарным графом. Несложно убедиться в том, что все графы, имеющие количество вершин, меньшее $|V(K_5)|$, или количество ребер, меньшее $|E(K_{3,3})|$, можно правильно вложить в плоскость.

Доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$ можно провести с помощью леммы Жордана. Эта лемма имеет дело с так называемой замкнутой простой кривой, то есть замкнутой кривой, нигде не пересекающей саму себя. Такая кривая C делит всю плоскость на две области — внутреннюю $\text{int}(C)$ и внешнюю $\text{ext}(C)$ по отношению к кривой C . Пусть точка a принадлежит внутренней по отношению к C области $\text{int}(C)$, а точка b — к внешней по отношению к C области.

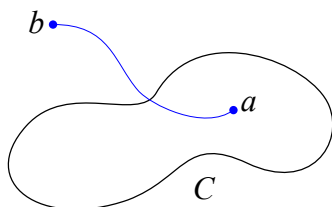


Рис. 55: Лемма Жордана

Лемма 11.2 (The Jordan Curve Theorem). *Любая кривая, соединяющая точку $a \in \text{int}(C)$ с точкой $b \in \text{ext}(C)$, имеет с кривой C хотя бы одну точку пересечения (рис.55).*

Интуитивно утверждение данной леммы является совершенно очевидным. Строгое же ее доказательство, однако, представляет собой достаточно серьезную задачу. Мы этим заниматься не будем, отсылая заинтересованного читателя к любой из книг по топологии или по математическому анализу.

11.1.3. Докажем с помощью леммы Жордана непланарность полного графа K_5 .

Теорема 11.3. *Граф K_5 не является планарным графом.*

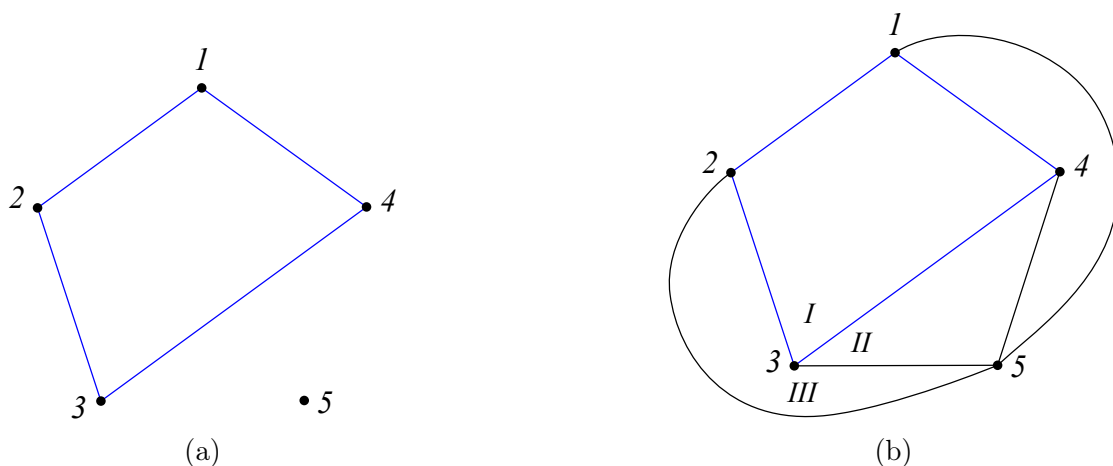


Рис. 56

Доказательство. Предположим противное, то есть предположим, что граф K_5 является планарным. Рассмотрим простой цикл $C = (1, 2, 3, 4)$ в этом графе. Этот цикл мы всегда можем правильно вложить в плоскость, получив на ней замкнутую простую кривую C , ограниченную ребрами этого цикла (рис.56,а). Кривая C разбивает плоскость \mathbb{R}_2 на внутреннюю $\text{int}(C)$ и внешнюю $\text{ext}(C)$ области. В одной из этих областей должна лежать вершина 5. Предположим для определенности, что $5 \in \text{ext}(C)$ (рис.56,а). В графе K_5 эта вершина должна быть соединена ребрами с вершинами 1 – 4. Несложно видеть, что мы всегда сможем на плоскости соединить точки, изображающие эти вершины, так, чтобы изображающие ребра отрезки кривых не пересекались бы между собой (см.рис.56,б). Все, что нам осталось — это нарисовать ребра $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$.

Прежде чем это делать, давайте посмотрим на окрестность точки 3 (см.рис.56,b). Как бы мы изначально не располагали на плоскости точки, изображающие вершины графа K_5 , и как бы мы потом не рисовали ребра $\{1,2\}, \dots, \{4,5\}$, окрестность этой точки всегда будет разбита ровно на три сектора — сектор, образованный ребрами $\{2,3\}$ и $\{3,4\}$, сектор, образованный ребрами $\{4,3\}$ и $\{3,5\}$, а также сектор, образованный ребрами $\{2,3\}$ и $\{3,5\}$ (секторы I, II и III на рис.56,b). Давайте убедимся в том, что ребро, соединяющее вершины 1 и 3, из вершины 3 может выходить только в сектор I.

Действительно, если бы ребро $\{3,1\}$ выходило из вершины 3 в сектор II, то оно попадало бы внутрь цикла $(3,4,5)$. Точка же 1 лежит вне этого цикла. Следовательно, согласно лемме Жордана, это ребро обязательно бы пересекло цикл $(3,4,5)$. Аналогично, выйдя из 3 в сектор III, мы бы попали внутрь цикла $(2,3,5)$. Вершина же 1 лежит вне этого цикла, и попасть в нее без пересечения с циклом $(2,3,5)$ невозможно. Единственный вариант, который нас устраивает — это вариант, когда ребро выходит из 3 в сектор I. В этом случае нам ничто не мешает соединить вершины 1 и 3 кривой, не пересекающейся с уже проведенными ребрами графа (см.рис.57).

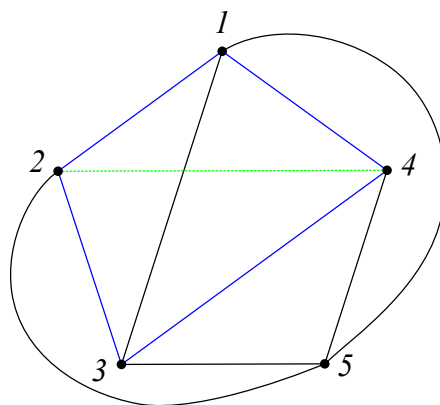


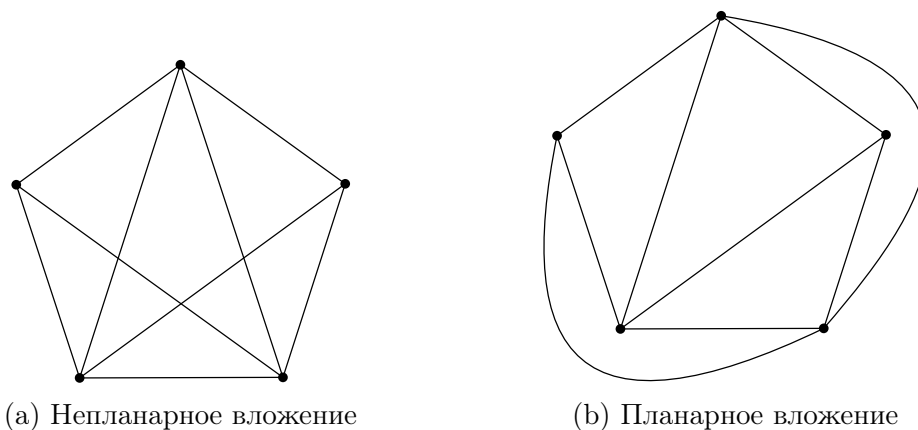
Рис. 57

Итак, все, что нам теперь осталось — это провести на плоскости кривую, соединяющую точки 2 и 4. Однако это сделать уже невозможно. Действительно, рассмотрим цикл $(1,3,5)$ (рис.57). Точка 2 лежит у нас вне этого цикла, а точка 4 — внутри цикла $(1,3,5)$. По лемме Жордана, любая кривая, соединяющая 2 и 4, обязана этот цикл пересекать. Следовательно, граф K_5 правильным образом в плоскость вложить невозможно, то есть K_5 представляет собой непланарный граф. \square

Замечание 11.4. Аналогичную технику можно использовать и для доказательства непланарности графа $K_{3,3}$ (смотри упражнение ??).

11.1.4. В процессе доказательства непланарности графа K_5 мы, в частности, доказали, что граф $K_5 \setminus e$, где e — произвольное ребро графа K_5 , можно правильным образом вложить в плоскость (рис.58,a). Кроме того, нам в процессе наших рассуждений удалось избавиться от всех пересечений ребер K_5 в точках, отличных от вершин графа K_5 , кроме одного. В этой связи можно дать следующие полезные определения.

Определение 11.5. Планарный граф G называется *максимальным* планарным графом, если добавление любого ребра между вершинами x и y , не являющимися смежными в графе G , превращает граф в непланарный.



(a) Непланарное вложение

(b) Планарное вложение

Рис. 58: Граф $K_5 \setminus e$

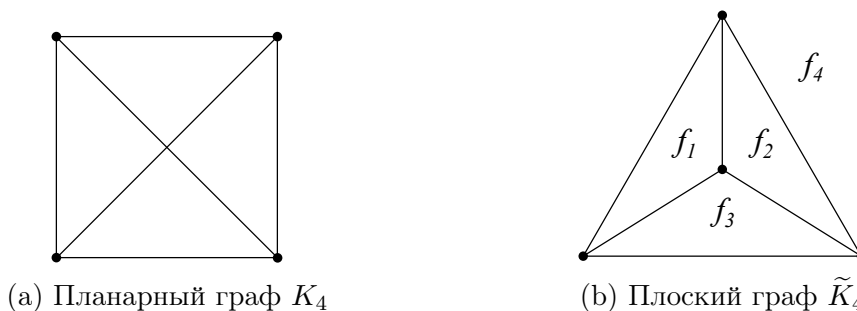
Определение 11.6. Минимальное количество пересечений изображающих ребра графа G отрезков в точках, отличных от точек, изображающих вершины графа G , называется *числом пересечений* $cr(G)$ (crossing number) графа G .

Число пересечений графа G является своеобразной мерой его непланарности. Оно, в частности, показывает, какое минимальное количество ребер в G нужно удалить для того, чтобы превратить его в планарный. Так, у планарных графов $cr(G) = 0$, у графа K_5 это число равно единице и так далее.

11.2. Вернемся к планарным графам и их правильным вложениям в плоскость. Если сам планарный граф G состоит из двух основных кирпичиков — вершины v и ребра e , то у отвечающего ему плоского графа появляется третий, не менее важный кирпичик — так называемая *грань* (face) f плоского графа \tilde{G} .

Определение 11.7. Гранью плоского графа \tilde{G} называется односвязная область, ограниченная вершинами и/или ребрами графа \tilde{G} .

Поговорим поподробнее об этих новых для нас объектах.



(a) Планарный граф K_4

(b) Плоский граф \tilde{K}_4

Рис. 59: Планарный граф K_4 и соответствующий ему плоский граф \tilde{K}_4

11.2.1. Рассмотрим в качестве примера правильное вложение графа K_4 в плоскость (рис.59,b) — плоский граф \tilde{K}_4 . У этого графа имеются четыре различные грани f_i . При этом три из этих граней ограничены, а одна из них — грань f_4 — является неограниченной. Такая грань (присутствующая в любом плоском графе \tilde{G}) называется *внешней гранью* плоского графа. Остальные грани называются *внутренними гранями* плоского графа \tilde{G} .

Заметим сразу же, что с топологической точки зрения никакой особой разницы между внешней и внутренними гранями нет. Для того, чтобы это понять, достаточно наряду с правильными вложениями графа в плоскость рассмотреть так называемые *правильные вложения графа в сферу*.

Определение 11.8. Правильным вложением графа G в сферу называется такое изображение графа на сфере, при котором изображающие ребра графа G кривые пересекаются между собой только в точках, отвечающих вершинам графа G .

Сразу заметим, что, в отличие от плоского графа, все грани правильного вложения графа G в сферу ограничены.

Граф K_4 мы сумели правильно вложить как в плоскость, так и в сферу. Оказывается, что аналогичный факт имеет место и в общем случае. Именно, справедлива следующая

Теорема 11.9. *Граф G является планарным тогда и только тогда, когда его можно правильно вложить в сферу.*

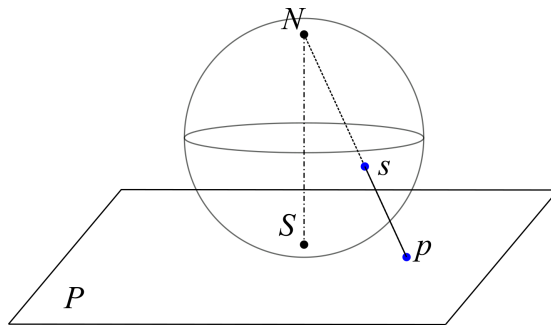


Рис. 60: Стереографическая проекция сферы на плоскость P

Доказательство. Рассмотрим так называемую стереографическую проекцию сферы на плоскость P (рис.60). Для построения такой проекции сфера ставится на плоскость, а из точки северного полюса сферы — точки N , диаметрально противоположной точке касания сферы S и плоскости P , проводятся лучи. Любой такой луч пересекает сферу в точке s , а плоскость — в точке p . Тем самым устанавливается взаимно-однозначное отображение $\eta: s \rightarrow p$ между точками на сфере с выколотой точкой N и точками на плоскости, которое и называется стереографической проекцией.

Теперь рассмотрим произвольное правильное вложение графа G в плоскость. Поставим сферу на плоскость в точке, отличной от вершин или ребер плоского графа \tilde{G} . Тогда стереографическая проекция плоскости на сферу даст нам граф, правильно вложимый в сферу. Очевидно, верно и обратное. \square

Вернемся к произвольному плоскому графу \tilde{G} , у которого имеется внутренняя грань f . Зафиксируем некоторую внутреннюю точку p этой грани. Любая стереографическая проекция отображает точку p в какую-то точку s на сфере S , а сам плоский граф \tilde{G} — в некоторое правильное вложение графа G в сферу. Возьмем теперь точку s в качестве северного полюса сферы и спроектируем граф, вложенный в сферу, на некоторую новую плоскость P' . В результате таких операций мы получим некоторый новый плоский граф \tilde{G}' , внешней гранью которого будет проекция грани f исходного плоского графа \tilde{G} .

11.2.2. Любая грань f плоского графа \tilde{G} ограничена каким-то набором его вершин и ребер, образующих *границу* ∂f грани f . Говорят, что такие вершины и ребра *инцидентны* грани f . В

свою очередь, две грани называют смежными друг другу, если границы этих граней содержат хотя бы одно общее ребро.

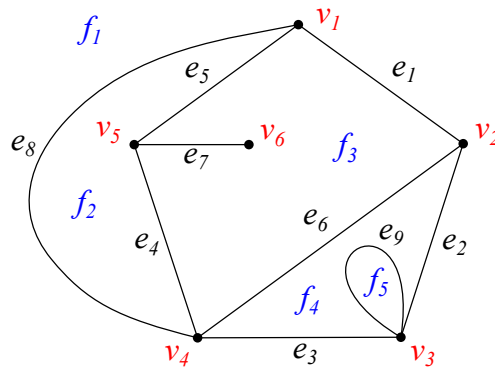


Рис. 61: Грани плоского графа \tilde{G}

В качестве примера рассмотрим плоский граф \tilde{G} , изображенный на рис.61. Для грани f_2 инцидентными ей вершинами являются вершины v_1 , v_4 и v_5 , а инцидентными ей ребрами — ребра e_4 , e_5 и e_8 . Смежными с f_2 являются грани f_1 и f_3 графа \tilde{G} .

Для любой грани мы можем также ввести понятие *степени* грани f как количество ребер, инцидентных данной грани. Так, степень грани f_2 на рис.61 равна трем.

В определении степени грани f есть одна тонкость. Дело в том, что все множество ребер плоского графа разбивается у нас на два блока. К первому блоку относятся так называемые граничные ребра, то есть ребра, по обе стороны от которых лежат разные грани. Ко второму блоку относятся так называемые мосты (cut edges), то есть ребра, по обе стороны от которых лежит одна и та же грань. Примером моста является ребро e_7 на рис.61. Считается, что мост, в отличие от граничного ребра, дает в степень $\deg(f)$ грани f вклад, равный двум. Как следствие, например, степень грани f_3 равна шести.

11.2.3. Для суммы степеней всех граней несложно доказать утверждение, аналогичное первой теореме теории графов:

$$\sum_{f \in \tilde{G}} \deg(f) = 2|E(\tilde{G})|. \tag{15}$$

Действительно, суммируя степени граней, мы каждое граничное ребро суммируем дважды. Каждый мост, в свою очередь, вносит в степень грани значение, равное двум. Таким образом, суммирование степеней всех граней действительно дает нам удвоенное количество всех ребер плоского графа \tilde{G} .

11.2.4. Выше мы сказали, что любое ребро плоского графа обязательно принадлежит границе какой-то грани и может быть либо разделяющим ребром, либо мостом. Данное утверждение, кажущееся довольно очевидным, требует, вообще говоря, строгого топологического доказательства. Мы на этом останавливаться не будем, отсылая заинтересовавшегося читателя, например, к учебнику [?].

В [?] также доказываются и другое интуитивно достаточно очевидные утверждения. В частности, там можно посмотреть, как можно строго доказать тот факт, что правильное вложение дерева в плоскость имеет единственную грань, а также утверждение о том, что границы различных граней плоского графа различны за единственным исключением — плоского графа, представляющего собой простой цикл. Мы будем принимать эти утверждения на веру.

11.2.5. Поговорим еще немного о границах грани g плоского графа \tilde{G} . Если \tilde{G} связан, то граница любой грани представляет собой замкнутый маршрут. Этот маршрут представляет собой цикл (не обязательно простой, см. границу грани f_4 на рис.61) в случае, если у графа \tilde{G} отсутствуют мосты, то есть в случае, когда \tilde{G} является реберно двусвязным. В случае несвязного графа \tilde{G} границы некоторых граней состоят из объединения нескольких замкнутых маршрутов.

Теорема 11.10. *В плоском (вершинно) двусвязном графе \tilde{G} граница любой грани представляет собой простой цикл в графе \tilde{G} .*

Доказательство. Рассмотрим разложение графа \tilde{G} на ручки P_0, \dots, P_k , а также соответствующую этому разложению последовательность подграфов $G_i = G_{i-1} \cup P_i, i = 1, \dots, k$. Так как подграф $G_0 \equiv P_0$ представляет собой простой цикл, то обе его грани — внутренняя и внешняя — ограничены простым циклом G_0 . Докажем по индукции, что данное утверждение остается справедливым и для любого подграфа $G_i, i = 1, \dots, k$.

Заметим, прежде всего, что любой подграф плоского графа, и, в частности, подграф G_i , является плоским. Как следствие, ручка P_i подграфа G_{i-1} лежит в одной из граней f этого подграфа. Любая грань подграфа G_{i-1} , отличная от f , является и гранью подграфа G_i . По индукционному предположению, все эти грани ограничены простыми циклами. Наконец, и грань f также ограничена простым циклом. Ручка P_i разбивает этот простой цикл на два простых цикла. Таким образом, все грани подграфа G_i ограничены простыми циклами. \square

Следствие 11.11. *В любом простом трехсвязном плоском графе \tilde{G} любые две соседние с произвольной вершиной x вершины принадлежат общему циклу C .*

Доказательство. Так как граф \tilde{G} трехсвязный, то граф $\tilde{G} - x$ гарантированно является двусвязным. Пусть f есть грань, в которой лежала удаленная вершина x . Тогда любые две соседние с ней вершины y и z принадлежат границе этого цикла. По доказанной выше теореме, граница любой грани в $\tilde{G} - x$ представляет собой простой цикл ∂f . Следовательно, вершины y и z принадлежат одному и тому же циклу ∂f .

11.3. Сравнение формулы (15) с первой теоремой теории графов показывает, что в планарных графах

$$\sum_{v \in \tilde{G}} \deg(v) = \sum_{f \in \tilde{G}} \deg(f).$$

Можно сказать, что вершины и грани планарной карты в определенном смысле взаимозаменяемы. Формализовать это понятие взаимозаменяемости можно с помощью так называемого двойственного (или двойственного) к \tilde{G} плоского графа \tilde{G}^* .

11.3.1. Строится двойственный граф \tilde{G}^* к плоскому графу \tilde{G} следующим образом (см.рис. 62): мы помещаем в каждую грань графа \tilde{G} по вершине (помеченной на рис.62 голубым цветом), которые и будут вершинами двойственного графа \tilde{G}^* . Затем для каждого ребра e , инцидентного граням f_1 и f_2 , мы проводим ребро e^* , которое пересекает e в единственной точке и соединяет вершины \tilde{G}^* , соответствующие граням f_1 и f_2 (ребра, окрашенные в голубой цвет на рис.62). В результате мы, по построению, получаем некоторый плоский граф \tilde{G}^* , вершины которого отвечают граням, а грани — вершинам исходного плоского графа \tilde{G} . Такой граф и называется двойственным к исходному плоскому графу \tilde{G} .

Заметим, что если ребро e является в \tilde{G} мостом, то $f_1 = f_2$, так что e^* является в двойственном графе \tilde{G}^* петлей. Обратно, любая петля $e \in \tilde{G}$ становится мостом в \tilde{G}^* .

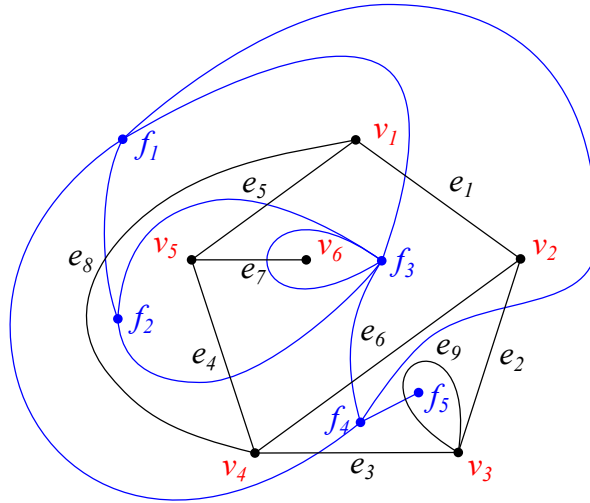


Рис. 62: Двойственный к плоскому графу \tilde{G} граф \tilde{G}^*

Двойственный к r -валентному графу \tilde{G} граф \tilde{G}^* называется r -ангуляцией. У такого графа степень любой грани равна, очевидно, r . В частности, в случае $r = 3$ имеем так называемую триангуляцию, а в случае $r = 4$ — квадрангуляцию плоскости.

11.3.2. Докажем следующее важное свойство двойственных графов.

Утверждение 11.12. *Двойственный к любому плоскому графу \tilde{G} граф \tilde{G}^* всегда является связным графом.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольную пару (f_1, f_2) граней плоского графа \tilde{G} . Обозначим через x_1 и x_2 какие-то внутренние точки этих граней. Ясно, что через любую пару таких точек можно провести кривую, соединяющую x_1 и x_2 и не проходящую ни через одну из вершин исходного графа \tilde{G} . Такой кривой в графе \tilde{G}^* будет отвечать путь, соединяющий вершины \tilde{G}^* , соответствующие граням f_1 и f_2 исходного графа. Следовательно, граф \tilde{G}^* является связным. \square

11.3.3. Мы можем рассмотреть и двойственный к графу \tilde{G}^* связный плоский граф \tilde{G}^{**} . Оказывается, что в случае, когда исходный плоский граф G является связным, граф \tilde{G}^{**} изоморфен исходному графу G .

Действительно, в случае связного графа \tilde{G} количество вершин графа \tilde{G} совпадает с количеством граней двойственного графа \tilde{G}^* , причем любая грань f^* двойственного к нему графа \tilde{G}^* содержит ровно одну вершину v исходного графа \tilde{G} . Это позволяет нам при построении графа \tilde{G}^{**} выбрать в качестве его вершин вершины v исходного графа \tilde{G} . Такой выбор вершин и задаст нам искомый изоморфизм графов \tilde{G} и \tilde{G}^{**} .

Заметим, что в случае несвязного графа \tilde{G} граф \tilde{G}^{**} будет связным, а потому граф \tilde{G}^{**} изоморфным G быть уже не может.

11.3.4. Определяя двойственный граф \tilde{G}^* , мы определяли его как двойственный к плоскому графу \tilde{G} , а не к соответствующему \tilde{G}^* планарному графу. Следующее утверждение позволит нам определить двойственный граф непосредственно к исходному планарному графу G .

Утверждение 11.13. *Пусть \tilde{G}^* есть двойственный к плоскому графу \tilde{G} . Тогда набор ребер в \tilde{G} образует в \tilde{G} цикл C тогда и только тогда, когда соответствующий набор ребер двойственного графа \tilde{G}^* образует в \tilde{G}^* реберный разрез.*

Доказательство. Любой цикл C в \tilde{G} ограничивает одну или несколько граней плоского графа \tilde{G} . Как следствие, внутренность этого цикла $\text{int}(C)$ содержит некоторое непустое подмножество S множества вершин двойственного к \tilde{G} графа \tilde{G}^* . Те ребра графа \tilde{G}^* , которые пересекают цикл C , и формируют в \tilde{G}^* реберный разрез $[S, \bar{S}]$. Обратная импликация теперь также очевидна. \square

Используя доказанное утверждение, мы можем теперь определить так называемый *абстрактно-двойственный* G^* к планарному графу G граф. При этом двойственный к плоскому графу \tilde{G} называют *геометрически двойственным* графом \tilde{G}^* .

Определение 11.14. Граф G^* называется абстрактно двойственным к планарному графу G в случае, если имеется следующее взаимно-однозначное соответствие между ребрами графов G и G^* : если набор ребер в G образует цикл в G , то соответствующий ему набор ребер в G^* образует реберный разрез в G^* и наоборот.

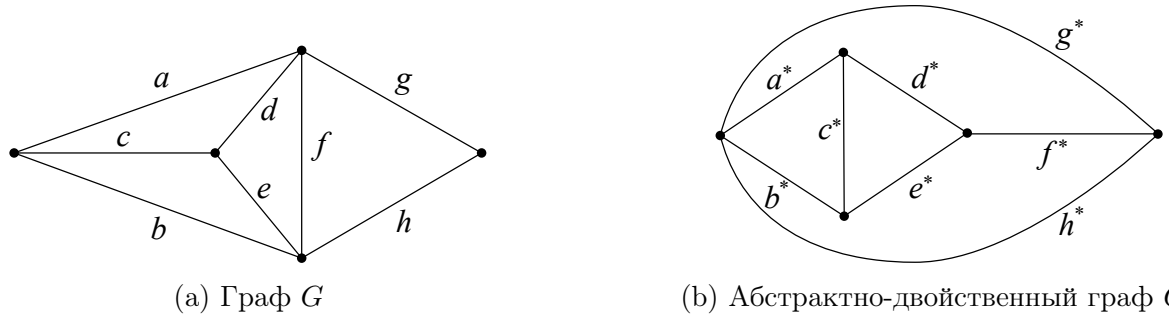


Рис. 63: Граф G и абстрактно двойственный к нему граф G^*

На рис.63,а показан граф G , а на рис.63,б изображен абстрактно двойственный к нему граф G^* . Соответствующие ребра этих графов помечены одними и теми же буквами.

Оказывается, наличие у некоторого графа G абстрактно двойственного к нему означает, что граф G является планарным. Именно, справедливо следующее

Утверждение 11.15. *Граф G является планарным тогда и только тогда, когда он имеет абстрактно двойственный к нему граф G^* .*

11.4. В заключение данного параграфа поговорим о единственности вложения планарного графа в плоскость.



Рис. 64: Неединственность вложения планарного графа G

11.4.1. Рассмотрим два плоских графа \tilde{G}_1 и \tilde{G}_2 , показанных на рис.64,а и рис.64,б соответственно. Несложно понять, что оба эти графа изоморфны одному и тому же планарному графу G , построенному на трех вершинах, две из которых являются листьями, и трех ребрах, одно из которых является петлей. Следовательно, и сами графы \tilde{G}_1 и \tilde{G}_2 изоморфны друг другу. Однако два эти графа отличаются друг от друга с топологической точки зрения. Действительно, у

графа \tilde{G}_1 одна из граней имеет степень пять, а вторая грань — единицу, тогда как у графа \tilde{G}_2 обе грани имеют степень, равную трем. Про такие плоские графы говорят, что они различны с точки зрения вложения планарного графа G в плоскость. И с этой точки зрения, как мы видим, планарный граф в плоскость вкладывается неединственным образом.

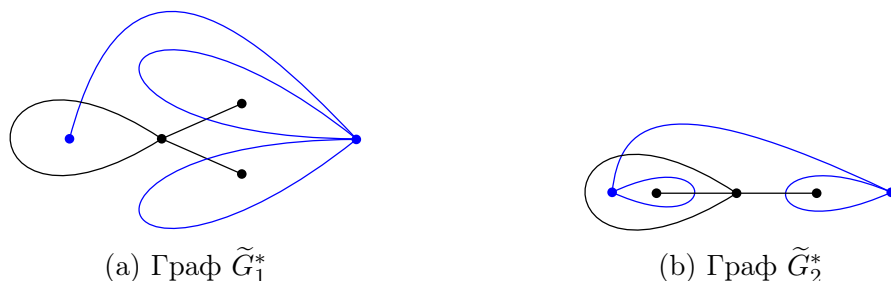


Рис. 65: Двойственные графы

Заметим сразу же, что показанным на рис.64 плоским графам отвечают неизоморфные двойственные графы \tilde{G}_1^* и \tilde{G}_2^* (см.рис.65). Действительно, степени двух вершин графа \tilde{G}_1^* равны 5 и 1, а степени двух вершин графа \tilde{G}_2^* совпадают и равны трем.

11.4.2. Давайте теперь поймем, чем вызвана неединственность вложения планарного графа в плоскость. Особенность показанных на рис.64 графов \tilde{G}_1 и \tilde{G}_2 состоит в том, что у соответствующего им планарного графа G имеется точка сочленения — вершина 3 на рис.64. Любой блок — в данном случае либо ребро $\{3, 1\}$, либо ребро $\{3, 2\}$ — может вокруг этой точки сочленения как вокруг шарнира вращаться. Как следствие, каждое из этих ребер может быть уложено либо внутрь, либо снаружи петли. Итак, вложение односвязных графов, не являющихся двусвязными, в плоскость неединственно.

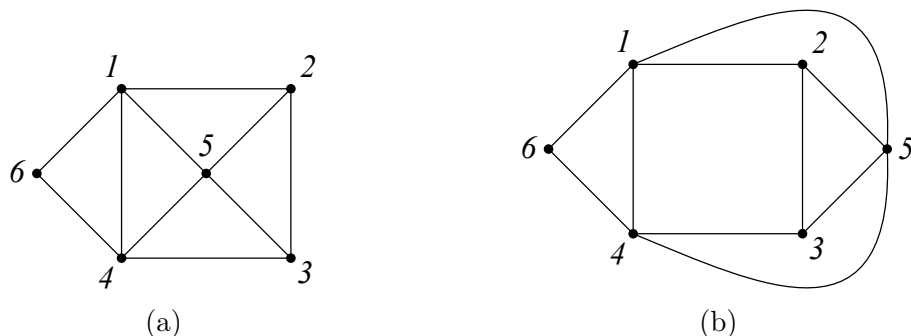


Рис. 66: Различные укладки двусвязного планарного графа G

Давайте усилим ограничения на планарный граф G и предположим, что такой граф является двусвязным. К сожалению, и в этом случае вложение такого графа в плоскость может быть неединственным. На рис.66 представлены два вложения одного и того же планарного двусвязного графа G . В первом вложении граф \tilde{G}_1 имеет пять граней степени 3 и одну (внешнюю) грань, степень которой равна пяти. В плоском графе \tilde{G}_2 содержатся две грани степени 4 и три грани степени 3. Как следствие, двойственные к ним графы \tilde{G}_1^* и \tilde{G}_2^* неизоморфны друг другу.

Для объяснения неединственности вложения двусвязных графов в плоскость вспомним, что любой такой граф можно рассматривать как цикл, к которому последовательно прикреплены одна или несколько ручек. Рассмотрим ручку $\{1, 6, 4\}$ на рис.66. Видно, что эту ручку мы можем вращать вокруг вершин 1 и 4 привязки этой ручки к остальной части графа G , вкладывая ее

либо во внешнюю грань, либо в одну из внутренних граней. В результате мы и получаем две различные укладки такого графа в плоскость.

Итак, вложение в плоскость планарного графа, не являющегося трехсвязным, может быть неединственным. Уитни в 1933 году показал, что вложение любого планарного трехсвязного графа в плоскость уже является единственным. Этот результат мы докажем в одном из следующих параграфов, когда накопим необходимую для его доказательства технику.

12 Формула Эйлера и ее обобщения

12.1. Приведенное в первом параграфе доказательство непланарности графа K_5 использовало лемму Жордана. Оказывается, однако, что это же свойство графа K_5 , равно как и многие другие свойства планарных графов, можно достаточно просто доказать с использованием знаменитой формулы Эйлера, связывающей количество вершин, ребер и граней в плоских графах.

12.1.1. Рассмотрим в качестве первого примера одно из пяти платоновых тел, а именно, правильный куб. В таком графе количество n вершин равно 8, количество m ребер равно 12, а количество r граней равно 6. Рассматривая линейную комбинацию этих чисел вида $n - m + r$, мы увидим, что она равна двум:

$$n - m + r = 2 \tag{16}$$

Оказывается, что это же равенство имеет место и для остальных платоновых тел. Более того, изучая выпуклые многогранники, Леонард Эйлер заметил, что для любого из них выполняется равенство (16). Проверив данный факт вначале экспериментально, на многочисленных примерах, Эйлер затем нашел строгое доказательство соотношения (16).

Мы с вами, однако, уже знаем, что любой выпуклый многогранник правильным образом вкладывается в сферу. Кроме того, мы знаем, что любой граф, правильно вложимый в сферу, правильно вложим и в плоскость. Иными словами, есть подозрение, что соотношение (16) может оказаться справедливым и для любых связных плоских графов. Оказывается, это действительно так. Именно, справедлива следующая

Теорема 12.1. *Количества вершин $n = |V(\tilde{G})|$, ребер $m = |E(\tilde{G})|$ и граней $r = |F(\tilde{G})|$ произвольного связного плоского графа \tilde{G} удовлетворяют следующему соотношению:*

$$n - m + r = 2. \tag{17}$$

Доказательство проведем индукцией по количеству r граней плоского графа \tilde{G} . Мы ранее уже заметили, что любое правильное вложение в плоскость связного плоского графа без циклов, то есть дерева, имеет в точности одну грань. Но для дерева количество n ребер и количество m вершин связаны равенством $n - m = 1$, так что для случая $r = 1$ теорема верна.

Предположим теперь, что теорема верна для всех плоских связных графов с $(r - 1)$ -й гранью, $r > 1$, и покажем, что она остается верной и для любого плоского связного графа \tilde{G} с количеством граней, равным r . Так как $r > 1$, то такой граф содержит хотя бы один простой цикл. Произвольное ребро e этого цикла принадлежит границам ровно двух граней f_1 и f_2 . Удаление этого ребра приводит к образованию единой грани $f_{12} = f_1 \cup f_2$. Так как e принадлежит циклу графа \tilde{G} , то получающийся после удаления ребра e плоский граф $\tilde{G} - e$ остается связным. По индукционному предположению, для такого графа справедлива формула Эйлера

$$|V(\tilde{G} - e)| + (|F(\tilde{G} - e)| - 1) - (|E(\tilde{G} - e)| - 1) = 2.$$

Отсюда следует, что формула (17) верна и для исходного графа \tilde{G} . \square

12.1.2. Формула Эйлера является чрезвычайно мощным инструментом доказательства многих полезных фактов, касающихся плоских графов. Например, априори не очевидно, что различные плоские графы, отвечающие вложению одного и того же связного планарного графа G в плоскость, имеют одинаковое количество граней. С помощью же формулы Эйлера данное утверждение доказывается абсолютно элементарно.

Утверждение 12.2. *Все правильные вложения одного и того же связного планарного графа G в плоскость имеют одинаковое количество граней.*

Доказательство. Согласно формуле Эйлера (17), количество $r = |F(\tilde{G})|$ граней плоского графа \tilde{G} зависит лишь от количества вершин и ребер исходного планарного графа G и никак не зависит от конкретного способа вложения G в плоскость. \square

12.1.3. С помощью теоремы Эйлера можно получить некоторые полезные оценки на количество ребер в плоских графах.

Определение 12.3. Триангуляцией \mathbb{R}_2 называется плоский простой граф, степень $\deg(f)$ любой грани которого (включая и внешнюю грань) равна трем.

Утверждение 12.4. *Плоский простой граф \tilde{G} , построенный на $n \geq 3$ вершинах, имеет не более чем $m = 3n - 6$ ребер, причем равенство*

$$m = 3n - 6$$

достигается лишь в случае плоской триангуляции \mathbb{R}_2 .

Доказательство. Прежде всего, заметим, что достаточно рассматривать только связные графы. Действительно, добавляя ребра, мы можем превратить любой несвязный граф в связный, для которого неравенство $m \leq (3n - 6)$ справедливо. Тем более оно справедливо и для исходного несвязного графа.

В простом связном графе, построенном на $n \geq 3$ вершинах, степень любой грани больше или равна трем. Следовательно, сумма степеней всех граней такого графа больше или равна $3r$, $r = |F(\tilde{G})|$. С другой стороны, согласно равенству (15), эта же сумма равна удвоенному количеству ребер. Иными словами,

$$2m \geq 3r \quad \implies \quad r \leq 2m/3.$$

Теперь осталось воспользоваться формулой Эйлера (17):

$$2 = n - m + r \leq n + 2m/3 - m = n - m/3 \quad \implies \quad m \leq 3n - 6.$$

Ясно, что равенство достигается лишь в случае триангуляции плоского графа, в которой сумма всех граней в точности равна $3r$. \square

Следствие 12.5. *Степень любой грани в плоском графе \tilde{G} , отвечающем максимальному планарному графу G , равна трем.*

Доказательство очевидно — если бы это было не так, то мы могли бы провести дополнительные ребра в грани, степень которой отлична от трех, не нарушив правильную укладку этого графа в плоскость.

Следствие 12.6. *Любой простой плоский граф \tilde{G} обязан иметь вершину, степень которой не превосходит пяти.*

Доказательство. Для графов с количеством вершин $n < 3$ утверждение тривиально, поэтому будем считать, что в графе \tilde{G} количество вершин $n \geq 3$. Предположим, что в таком графе для любой вершины $x \in V(\tilde{G})$ степень $\deg(x) \geq 6$. В этом случае

$$2m = \sum_{x \in V(\tilde{G})} \deg(x) \geq 6n,$$

а это противоречит утверждению 12.4, согласно которому $m \leq 3n - 6$. □

Замечание 12.7. Так как в последних двух утверждениях речь идет только о вершинах плоского графа \tilde{G} , то это означает, что аналогичные утверждения справедливы также и для исходного планарного графа G .

12.1.4. С помощью формулы Эйлера можно довольно просто доказать, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными. Действительно, граф K_5 содержит $\binom{5}{2} = 10$ ребер, тогда как согласно утверждению (12.4), планарный граф на $n = 5$ вершинах не может содержать более чем $3 \cdot 5 - 6 = 9$ ребер.

Для доказательства непланарности графа $K_{3,3}$ с помощью теоремы Эйлера можно, прежде всего, заметить, что $K_{3,3}$ не содержит циклов длины меньшей, чем четыре. Следовательно, в случае, если бы граф $K_{3,3}$ был бы планарным, степень каждой грани во вложении $K_{3,3}$ в \mathbb{R}_2 была бы больше или равна четырем. Тогда, согласно утверждению (12.4),

$$\begin{aligned} 4|F(K_{3,3})| &\leq \sum_{f \in \tilde{K}_{3,3}} \deg(f) = 2|E(\tilde{K}_{3,3})| = 18 &\implies & |F(K_{3,3})| \leq 4 &\implies \\ &\implies |V(K_{3,3})| - |E(K_{3,3})| + |F(K_{3,3})| \leq 6 - 9 + 4 = 1, \end{aligned}$$

что противоречит формуле Эйлера (17).

12.2. Ранее мы уже неоднократно убеждались в том, что один и тот же планарный граф мы можем различными способами правильно вложить в плоскость. Как правило, более предпочтительными с эстетической точки зрения являются вложения, при которых изображающие ребра кривые являются отрезками прямых.

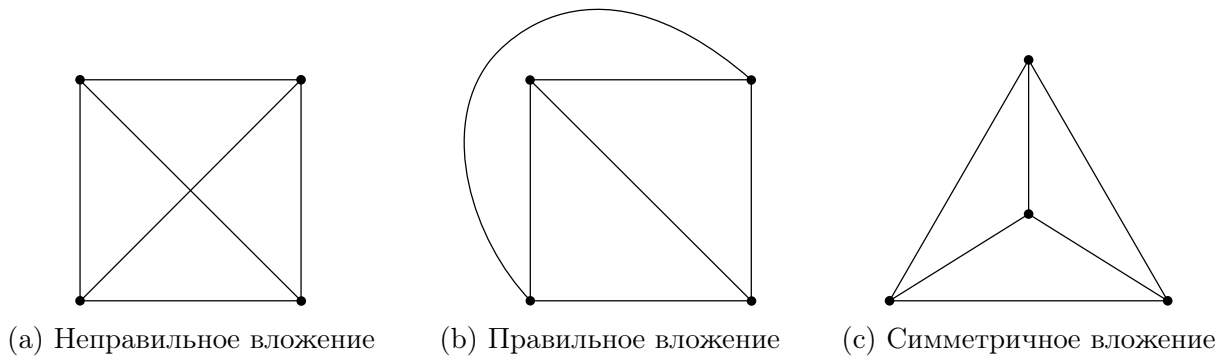


Рис. 67: Различные вложения K_4 в плоскость

12.2.1. На рис.67,а показан хорошо нам знакомый полный граф K_4 , построенный на четырех вершинах. Такое вложение графа в плоскость правильным, однако, не является — соединяющие

противоположные вершины ребра $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ пересекаются друг с другом в точке, отличной от вершин графа K_4 . Данную укладку легко, конечно же, подправить и сделать правильной, нарисовав одно из этих ребер вне квадрата, соединяющего вершины графа K_4 (рис.67,b).

Данную укладку легко, конечно же, подправить и сделать правильной, нарисовав одно из этих ребер вне квадрата, соединяющего вершины графа K_4 (рис.67,b). Такая укладка, однако, выглядит не очень красиво — в ней потеряна симметрия, присутствующая на рис.67,a. С этой точки зрения значительно более симпатичной выглядит правильная укладка графа K_4 , изображенная на рис.67,c — в ней все ребра изображены отрезками прямых, а сам рисунок является симметричным.

12.2.2. Рассмотрим еще раз в этой связи два правильные вложения графа K_4 в плоскость, показанные на рис.67,b и рис.67,c. Мы уже отмечали, что показанное на рис.67,c вложение K_4 является значительно более симпатичным по сравнению со вложением того же графа, изображенного на рис.67,b. В этой связи возникает законный вопрос — всегда ли мы можем правильно вложить планарный граф в плоскость так, чтобы его ребра изображались отрезками прямых?

12.2.3. Положительный ответ на этот вопрос был дан независимо сразу тремя математиками — Klaus Wagner в 1936 году, Istwan Faru в 1948 году и S.K.Stein в 1951 году.

Теорема 12.8. *Каждый простой планарный граф имеет правильное вложение в плоскость, при котором все его ребра изображаются отрезками прямых.*

Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин в графе G . В качестве базы индукции выберем граф K_4 — и сам этот граф, и любой его подграф можно вложить в плоскость нужным нам образом.

Теперь предположим, что теорема верна для всех планарных простых графов, построенных на $(n-1)$ -й вершине, и покажем, что она верна и для графа G , построенного на n вершинах. Сразу заметим, что если G не является максимально планарным графом, то мы всегда можем добавить к нему ребра без добавления дополнительных вершин и превратить его в максимальный планарный граф. Поэтому далее будем считать, что G — максимальный планарный граф.

Рассмотрим какое-то правильное вложение \tilde{G} графа G в плоскость. Согласно упражнению ??, в графе G имеется по крайней мере четыре вершины, степень которых меньше или равна пяти. Степень внешней грани \tilde{G} равна трем, поэтому количество вершин степени $\deg(x) \leq 5$, инцидентных этой грани, не превосходит трех. Как следствие, в графе \tilde{G} обязательно найдется вершина x степени $\deg(x) \leq 5$, не принадлежащая границе внешней грани графа \tilde{G} . Удалим теперь эту вершину x . Граф $G - x$, по индукционному предположению, можно вложить в плоскость так, чтобы все его ребра изображались отрезками прямых. У соответствующего вложения — графа $\tilde{G} - x$ — имеется грань f , степень которой равна трем, четырем или пяти. Если эта грань оказалась выпуклым многоугольником, то мы всегда сможем добавить внутрь этой грани вершину x , соединить ее прямыми отрезками с вершинами многоугольника и получить требуемое вложение графа G в плоскость. Если f является треугольником, это мы сможем сделать всегда. Если же f является четырехугольником или пятиугольником, грань f может оказаться невыпуклой и мы должны действовать чуть более осторожно.

На рис.68 показано, как действовать в случае, когда грань f представляет собой невыпуклый четырехугольник (рис.68,a) — нам нужно просто продолжить два ребра до пересечения с двумя другими ребрами, получить выпуклый заштрихованный четырехугольник (рис.68,b), поместить вершину x в любую точку, лежащую внутри заштрихованной области (рис.68,c), а затем соединить ее ребрами с оставшимися вершинами рассматриваемого четырехугольника (пунктирные

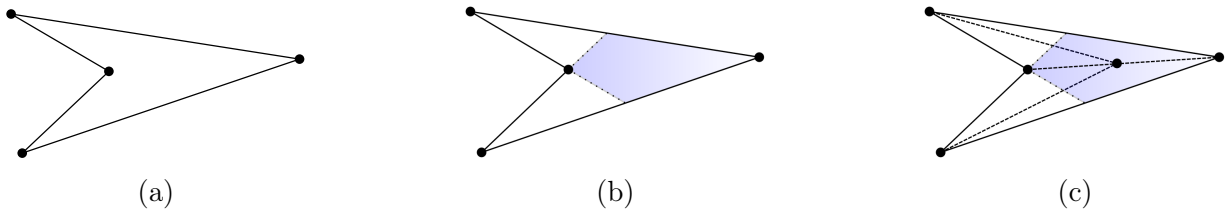


Рис. 68: Схема построения в случае невыпуклого четырехугольника

линии на рис.68,с).

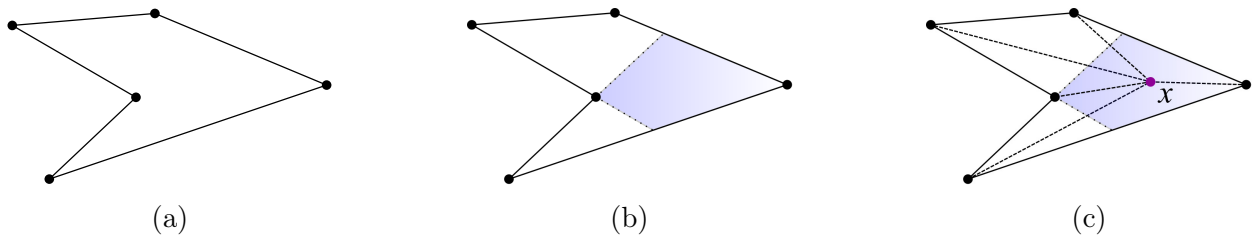


Рис. 69: Схема построения в случае невыпуклого пятиугольника. Первый подслучай

На рис.70 показан самый нетривиальный случай, когда грань f представляет собой невыпуклый пятиугольник. Этому случаю отвечают два подслучая. Первый подслучай, по сути, не отличается от случая невыпуклого четырехугольника (рис.69). Как действовать во втором подслучае, показано на рис.70,б и рис.70,с. \square

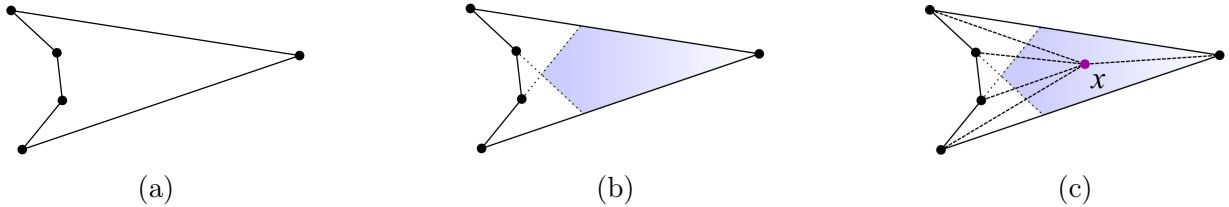


Рис. 70: Схема построения в случае невыпуклого пятиугольника. Второй подслучай

12.2.4. В дальнейшем доказанный выше результат был существенным образом усилен. Так, в 1963 году William Tutte доказал следующее замечательное утверждение.

Теорема 12.9 (Tutte, 1963). *Любой планарный простой трехсвязный граф G допускает правильную укладку в плоскость \tilde{G} , при которой любое ребро \tilde{G} изображается отрезком прямой, а любая внутренняя грань и граница внешней грани \tilde{G} представляет собой выпуклый многоугольник.*

Мы это утверждение докажем в следующем параграфе. Здесь же стоит заметить интересную механическую интерпретацию данного результата. Зафиксируем границу внешней грани, закрепив принадлежащие этой грани вершины в вершинах соответствующего выпуклого n -угольника. Если теперь предположить, что остальные вершины связаны друг с другом и с вершинами внешней грани пружинками, то в состоянии равновесия данной механической системы мы получим некоторую укладку, которая описывается теоремой Татта.

12.3. В первом параграфе мы ввели число пересечений $cr(G)$ графа G как меру его непланарности. Оказывается, существует и еще одна популярная мера непланарности графа — так называемая *толщина* (thickness) графа.

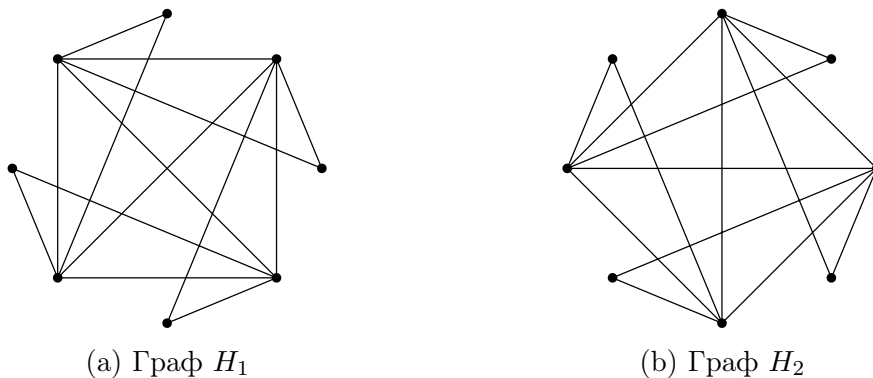


Рис. 71

12.3.1. Напомним, что под декомпозицией графа G на подграфы мы понимаем набор подграфов графа G , наложение которых друг на друга дает нам исходный граф. Рассмотрим показанную на рис.71 декомпозицию графа K_8 на два изоморфных друг другу графа H_1 (рис.71,а) и H_2 (рис.71,б). В упражнении ?? предлагается доказать, что любой из двух изображенных на рис.71 графов действительно является планарным. Так как K_8 можно представить в виде декомпозиции двух планарных графов, и двойка — это минимальное количество планарных графов, для которых это возможно, то про граф K_8 говорят, что он имеет толщину, равную двум.

Определение 12.10. Толщиной $t(G)$ графа G называется минимальное количество его планарных подграфов H_i , композиция

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_\vartheta$$

которых дает нам исходный граф G .

12.3.2. Термин “толщина графа” пришел в теорию графов из микроэлектроники, в которой электрические цепи печатаются на непроводящей (как правило, кремниевой) плате, называемой *печатной платой*. Так как контакты между элементами печатной платы (транзисторами, конденсаторами и т.д.) наносятся на плату неизолированными, то они не должны пересекаться между собой. Иными словами, соответствующие графы на плате должны быть плоскими.

На практике, однако, заранее неизвестно, сколько контактов может понадобиться и какие элементы печатных плат они должны соединять между собой. С точки зрения теории графов это означает, что граф, описывающий печатную плату, планарным может и не являться. Как следствие, мы для построения платы с технологической точки зрения должны предусмотреть несколько печатных плат (или несколько слоев одной и той же печатной платы) для построения полной электрической цепи на плате. Отсюда и определение толщины графа G как наименьшее количество печатных плат, которых нужно наложить друг на друга для обеспечения функциональности проектируемой электрической сети.

12.3.3. В случае планарных графов толщина $t(G) = 1$. Для графов K_5 и $K_{3,3}$ она равна двум.

Утверждение 12.11. Пусть G есть простой граф, построенный на $n \geq 3$ вершинах и m ребрах. Тогда его толщина ограничена снизу величиной $m/(3n - 6)$.

Доказательство. По определению толщины, граф G можно представить в виде декомпозиции $t(G)$ планарных субграфов H_i . Для каждого из них должно выполняться неравенство $m_i \leq 3n - 6$, где m_i — количество ребер в подграфе H_i . Суммируя все эти неравенства, мы и получим,

что

$$m \leq t(G) \cdot (3n - 6).$$

Используя доказанное выше утверждение, можно получить некоторые нижние оценки на некоторые классы графов. Так, для полных графов K_n можно показать (см. упражнение ??), что

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor. \quad (18)$$

Усилиями достаточно большого количества математиков было показано, что на самом деле

$$t(K_n) = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$$

для $n \neq 9, 10$. Для чисел $n = 9, 10$ толщина равна трем.

13 Критерии планарности графов. Теорема Куратовского

13.1. Как мы убедились в первом параграфе, не все графы можно правильно вложить в плоскость. В этой связи естественным образом возникает задача нахождения тех или иных критериев планарности графа G .

13.1.1. Заметим, прежде всего, что при проверке любого несвязного графа на планарность достаточно проверить на планарность каждую из его связных компонент. Поэтому далее мы можем считать, что граф G у нас является связным. Следующая простая теорема позволяет свести проверку связного графа на планарность к проверке на планарность каждого отдельного блока такого графа.

Теорема 13.1. *Односвязный граф G является планарным тогда и только тогда, когда каждый из его блоков является планарным.*

Доказательство. Действительно, в одну сторону утверждение теоремы очевидно — подграф любого планарного графа планарен. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда все блоки некоторого графа G планарны, и доказать, что и G в этом случае также является планарным графом. Проведем доказательство данного факта по индукции.

В случае, когда граф содержит единственный планарный блок, он, очевидно, с ним совпадает и является планарным. Теперь будем считать, что утверждение доказано для любых графов, состоящих из $k - 1$ блоков, $k > 1$, и докажем справедливость данного утверждения для графа, который содержит ровно k блоков. Пусть B есть произвольный концевой блок графа G . Удалим все вершины этого блока за исключением точки сочленения x — вершины, связывающей B с остальной частью графа G . Граф $G - B$ содержит $k - 1$ блок, и потому является планарным. Следовательно, существует плоский граф $\tilde{G} - \tilde{B}$, в котором точка \tilde{x} , изображающая вершину $x \in V(G)$, принадлежит внешней грани плоского графа. При таком выборе \tilde{x} мы всегда во внешнюю грань данного плоского графа можем правильно вложить и блок B . В результате мы получим правильное вложение исходного графа G в плоскость. \square

13.1.2. С учетом доказанной выше теоремы нам достаточно найти критерии планарности двусвязных графов. Исторически первым и наиболее известным результатом такого рода является критерий, полученный польским математиком Казимиром Куратовским в 1930 году. Для того, чтобы данный критерий сформулировать, нам понадобится ряд вспомогательных определений.

Определение 13.2. Подразбиением ребра $e = \{x, y\}$ графа G называется процесс замены ребра e на путь вида $\{x, z, y\}$, в котором z есть вершина степени два. Неформально подразбиение ребра означает, что мы на ребре e размещаем дополнительную вершину z .

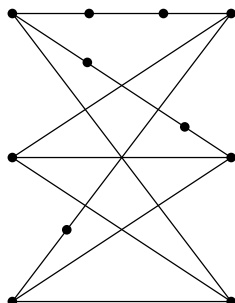


Рис. 72

Определение 13.3. Подразбиением графа G называется граф G' , полученный из исходного графа последовательным подразбиением его ребер.

На рис.72 показан пример графа, являющегося подразбиением графа $K_{3,3}$.

13.1.3. Понятно, что замена любого ребра в графе G на простой путь никак не влияет на возможность вложения данного графа в плоскость. Поэтому достаточно очевидным является следующее

Утверждение 13.4. *Граф G является планарным тогда и только тогда, когда любое его подразбиение также является планарным графом.*

Как следствие, никакой планарный граф не может содержать подграф, представляющий собой подразбиение ни графа K_5 , ни графа $K_{3,3}$. Польский математик Казимир Куратовский в 1930 году доказал замечательный факт — оказывается, это условие является не только необходимым, но и достаточным условием непланарности графа G .

Теорема 13.5 (Куратовский, 1930). *Граф G не является планарным тогда и только тогда, когда он содержит подграф, представляющий собой подразбиение K_5 или $K_{3,3}$.*

Определение 13.6. Для заданного графа G подграфом Куратовского называется подграф графа G , представляющий собой подразбиение K_5 или $K_{3,3}$.

Таким образом, теорема Куратовского утверждает, что любой непланарный подграф содержит подграф Куратовского. Первое относительно простое доказательство этой теоремы появилось в работе Dirac and Schuster 1954 года. Это доказательство вошло в некоторые старые учебники по теории графов (см., например, [?], [?], [?]). Более современные учебники по теории графов, такие, как [?], [?], [?], а также более специальные книги [?], [?], излагают доказательство теоремы Куратовского, полученное Thomassen в 1980 году. Как отмечают авторы [?], это доказательство не является в настоящее время ни самым простым, ни самым коротким. Так, например, имеется красивое и короткое доказательство теоремы Куратовского, полученное Юрием Макарычевым [?, ?]. Однако доказательство Thomassen позволяет получить многие другие полезные результаты теории планарных графов. В частности, это доказательство включает в себя и необходимый нам результат W.Tutte, касающийся правильного вложения планарного трехсвязного графа в

плоскость, при котором все грани являются выпуклыми многоугольниками. Поэтому здесь мы будем придерживаться идей доказательства теоремы Куратовского, изложенных Thomassen.

13.1.4. Доказательство Thomassen базируется на следующем результате, связанном с описанием трехсвязных графов.

Теорема 13.7 (Thomassen, 1981). Пусть G есть трехсвязный граф, построенный на пяти или более вершинах. Тогда в G имеется ребро $e \in E(G)$, такое, что граф G/e , получаемый при стягивании этого ребра, остается трехсвязным.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 13.8. Пусть G есть трехсвязный граф, построенный на пяти или более вершинах, и пусть $e = \{x, y\}$ есть ребро, при стягивании которого граф G/e перестает быть трехсвязным. Тогда найдется вершина $z \in V(G)$, такая, что множество $\{x, y, z\}$ представляет собой вершинно разделяющее множество графа G .

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены, то есть нашлось ребро e , в результате стягивания которого граф G/e становится двухсвязным. Как следствие, в таком графе обязательно существует двухвершинное вершинно разделяющее множество $\{z, w\}$. Одна из этих двух вершин (для определенности — вершина z) обязательно отлична от вершины, полученной при стягивании ребра e . Рассмотрим граф $F := G - z$. Так как G трехсвязный, то F обязан быть двухсвязным. Однако уже граф F/e имеет точку сочленения, а именно, вершину w . Это возможно лишь в случае, когда вершина w представляет собой результат стягивания ребра e в графе G/e . Это, в свою очередь, означает, что $\{x, y, z\}$ есть вершинно разделяющим множеством в графе G . \square

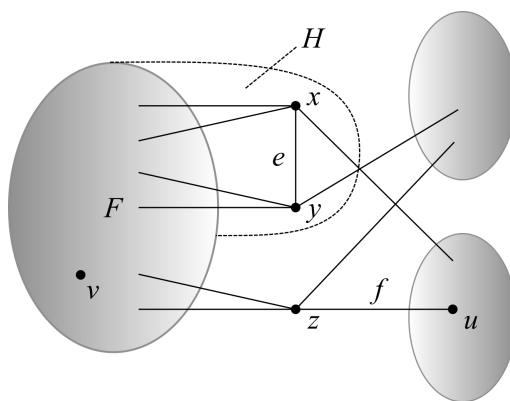


Рис. 73

13.1.5. Приступим теперь к доказательству теоремы Томассена. Пусть эта теорема неверна, то есть для любого ребра $e \in E(G)$ граф G/e не является трехсвязным. Тогда, согласно лемме, для любого $e = \{x, y\}$ найдется вершина $z \in V(G)$, такая, что множество $\{x, y, z\} \in V(G)$ представляет собой вершинно разделяющее множество графа G . Выберем ребро e и вершину z в графе G так, чтобы одна из компонент графа $G - x - y - z$ — компонента F — содержала бы максимально возможное количество вершин (рис.73). Добавляя к F вершины x и y , мы получим подграф H графа G (см. рис.73). Заметим, что подграф H обязан быть двухсвязным. Действительно, если бы это было не так, то есть если бы в H нашлась точка сочленения w , то вершины z и w представляли бы собой вершинно разделяющее множество в исходном графе G , что невозможно.

Пусть теперь u есть вершина, смежная в G с z и лежащая в компоненте связности графа $G - x - y - z$, отличной от F (см. рис.73). Выбирая в качестве ребра $f = \{z, u\}$, мы на основании леммы получаем, что в графе G найдется вершина v , такая, что $\{z, u, v\}$ является вершинно разделяющим множеством в G . При этом, в силу двусвязности подграфа H , удаление вершины v оставляет H связным вне зависимости от того, попадает v в H или нет. Но так как вершины z и u подграфу H изначально не принадлежат, то H лежит в некоторой компоненте связности графа $G - z - u - v$. Это же, в свою очередь, противоречит выбору F . Действительно, даже если v попала в H , то после удаления v в подграфе $H - v$ остается на единицу больше вершин, чем в F . Полученное противоречие доказывает теорему. \square

13.1.6. Следующая лемма позволяет не только получить доказательство теоремы Куратовского для случая трехсвязных графов, но и доказать теорему Татта о выпуклом вложении трехсвязного планарного графа.

Лемма 13.9. *Любой трехсвязный граф G , не содержащий подграфов Куратовского, допускает выпуклое вложение в плоскость.*

Доказательство будем проводить индукцией по количеству $n = |V(G)| \geq 5$ вершин графа G . В случае $n = 4$ и $n = 5$ утверждение леммы легко проверяется непосредственно, поэтому мы далее будем считать, что $n \geq 6$. Кроме того, граф G достаточно считать простым.

По теореме Томассена, G содержит ребро e , такое, что граф $H := G/e$ остается трехсвязным. Если бы граф H содержал некоторые подразделения K_5 или $K_{3,3}$, то тогда такие подразделения содержал бы и исходный граф G , что невозможно. Следовательно, по индукционному предположению, граф H допускает выпуклое вложение \tilde{H} в плоскость. Осталось доказать, что тогда такое же вложение допускает и исходный граф G .

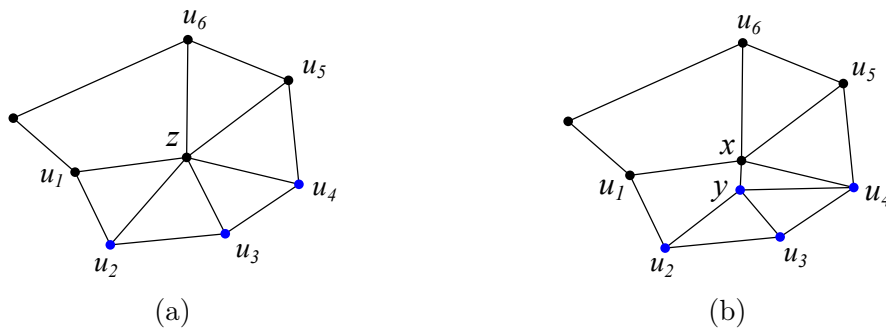


Рис. 74

Пусть $z \in H$ есть вершина, полученная в результате стягивания ребра e (рис.74,а). Согласно следствию 11.11, все соседи вершины z лежат на некотором общем для них простом цикле C , представляющем собой границу грани f плоского графа $\tilde{H} - z$. На том же цикле тогда должны лежать и все соседи вершин x и y в исходном графе G (рис.74,б). Кроме того, так как граф G трехсвязный, то и у вершины x , и у вершины y имеются по меньшей мере два соседа.

Пронумеруем в циклическом порядке все k вершин u_1, \dots, u_k , соседних с вершиной z в графе H (рис.74,а). Часть из этих вершин — вершины u_{i_1}, \dots, u_{i_l} — являются соседними с x вершинами в исходном графе G , а часть — соседними с вершиной y (вершины цикла, смежные с y в исходном графе G , помечены синим цветом на рис.74 и последующих рисунках). Предположим вначале, что в наборе вершин u_1, \dots, u_k все вершины, соседние с y , находятся между какими-то двумя соседними с x вершинами $v := u_{i_j}$ и $w := u_{i_{j+1}}$ (крайние вершины v и w могут быть при этом и общими соседями вершин x и y , смотри рис.74,б). В этом случае мы всегда сможем получить

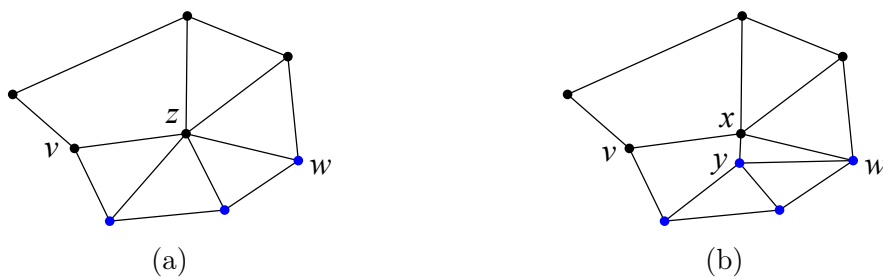


Рис. 75

выпуклое вложение графа G в плоскость, разместив x на месте вершины z , а вершину y — в некоторой малой окрестности вершины x , руководствуясь следующими правилами:

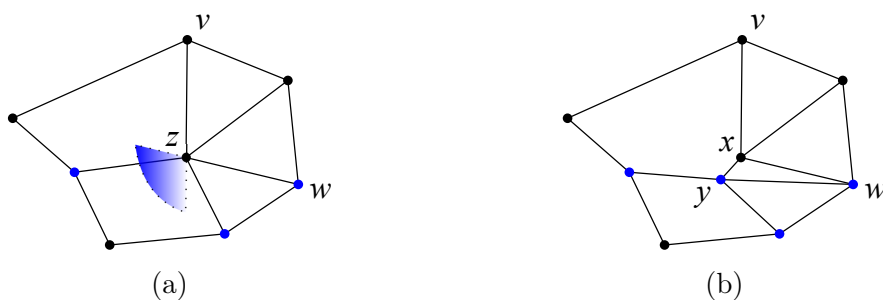


Рис. 76

- если угол между ребрами $\{v, x\}$ и $\{w, x\}$, ограничивающими сектор, в котором лежат соседние с y вершины, оказался меньше 180° (см.рис.75), то вершину y нужно разместить внутри угла, образованного этими ребрами;
- если же этот угол оказался больше 180° (см. рис.76), то y нужно поместить внутри угла, образованного продолжениями этих ребер.

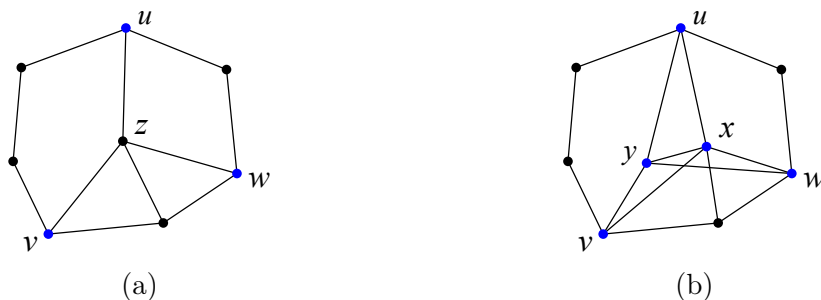


Рис. 77

Покажем теперь, что никакое другое расположение соседей вершин x и y в рассматриваемом графе невозможно. Действительно, если бы x и y имели какие-то три общие друг с другом соседние вершины u, v и w (см.рис.77), то тогда ребро $\{x, y\}$, а также ребра $\{x, u\}$, $\{x, v\}$, $\{x, w\}$, $\{y, u\}$, $\{y, v\}$, $\{y, w\}$ вместе с простыми путями, соединяющими между собой вершины u, v и w , образовывали бы подразбиение графа K_5 , что невозможно. Если же у нас в цикле имелись бы вершины v_1, v_2 и w_1, w_2 , такие, что v_1 и v_2 были бы соседями x , а w_1 и w_2 — соседями

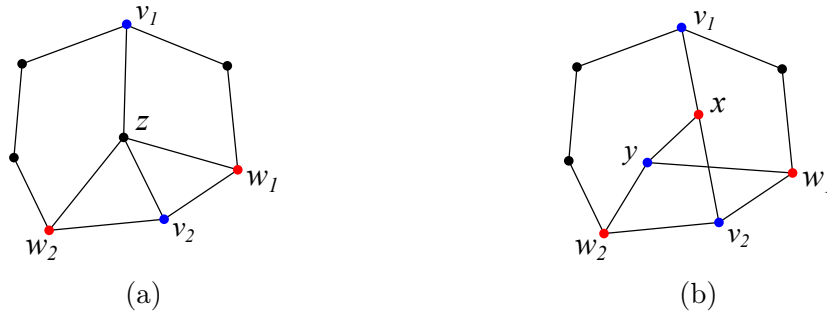


Рис. 78

y (см.рис.78), то ребра $\{x, y\}$, $\{x, v_1\}$, $\{x, v_2\}$, $\{y, w_1\}$, $\{y, w_2\}$, вместе с простыми путями, соединяющими вершины v_1, w_1, v_2, w_2 , образовывали бы подразбиение графа $K_{3,3}$, что также невозможно. \square

Из доказанной леммы с очевидностью следует

Теорема 13.10 (Tutte, 1960). *Каждый трехсвязный планарный граф допускает выпуклое вложение в плоскость.*

Замечание 13.11. Для двусвязных графов это утверждение уже неверно. Так, например, для планарного графа $K_{2,n}$ выпуклого вложения в плоскость не существует.

13.1.7. Итак, нам осталось разобраться со случаем двусвязных графов. В исходном доказательстве Thomassen [?] использовалась следующая идея доказательства теоремы Куратовского для данного случая. Возьмем граф G_0 , не содержащий подграфов Куратовского, и будем добавлять к нему ребра до тех пор, пока мы не получим максимальный по количеству ребер граф G , удовлетворяющий этому свойству. У такого графа добавление любого ребра, соединяющего изначально несмежные вершины x и y , обязано приводить к появлению подграфов Куратовского. Если нам удастся показать, что такой граф G обязательно является трехсвязным, то тем самым мы докажем, что G является планарным. Удаление в нем ребер, добавленных изначально к G_0 , планарность не нарушит. Следовательно, любой граф G_0 , не содержащий подграфов Куратовского, является планарным, и теорема Куратовского доказана.

Одним из достоинств описанного выше подхода является тот факт, что из него сразу следует теорема Фату. Действительно, граф G допускает выпуклое вложение в плоскость. В процессе удаления ребер, то есть в процессе перехода от графа G к исходному графу G_0 , выпуклость граней может нарушиться, тогда как свойство прямолинейности всех ребер останется неизменным.

Недостатком же такого подхода является достаточно долгое доказательство трехсвязности графа G . Поэтому вместо подхода Thomassen для доказательства теоремы Куратовского для графов, не являющихся трехсвязными, мы используем несколько другой подход [?], опирающийся на идею минимального непланарного графа.

Определение 13.12. Минимальным непланарным графом называется непланарный граф G , любой подграф $H \neq G$ которого является планарным графом.

Доказав, что любой минимальный непланарный граф, в котором отсутствуют подграфы Куратовского, является трехсвязным, мы получим противоречие с доказанной в предыдущем пункте

леммой 13.9 и тем самым полностью докажем теорему Куратовского. Действительно, мы тем самым докажем, что любой минимальный непланарный граф содержит подграф Куратовского. Но тогда и произвольный непланарный подграф тем более обязан содержать подграф Куратовского, а ровно это и утверждается в теореме Куратовского.

13.1.8. Итак, предположим, что у нас существует минимальный непланарный граф G . Заметим, прежде всего, что такой граф обязан быть по меньшей мере двусвязным. Действительно, если G несвязен или состоит из нескольких блоков, то каждый из этих блоков/связных компонент является планарным подграфом, а это невозможно — мы уже знаем, что если все блоки/связные компоненты графа G планарны, то и сам он является планарным.

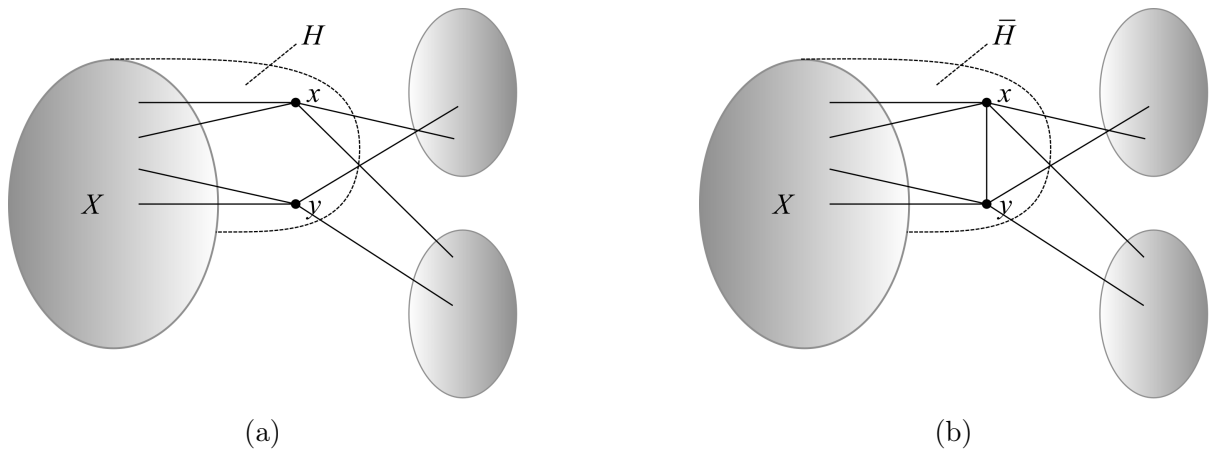


Рис. 79

Предположим теперь, что G не является трехсвязным, то есть в нем существует вершинное разделяющее множество $S := \{x, y\}$, удаление которого приводит к появлению двух или более компонент связности графа $G \setminus S$. Пусть X есть множество вершин одной из компонент связности графа $G \setminus S$ (см.рис.79,а). Добавив к X подмножество S вершин вместе со всеми ребрами, соединяющими x и y с вершинами X в исходном графе G , мы получим так называемую S -компоненту H графа G (рис.79,а). Если теперь к этой S -компоненте добавить ребро $\{x, y\}$ (вне зависимости от того, имелось ли такое ребро в исходном графе G или нет), то мы получим так называемую помеченную S -компоненту \bar{H} (рис.79,б).

Лемма 13.13. Пусть $S = \{x, y\}$ есть двухвершинный разрез в непланарном графе G . Тогда хотя бы для одной S -компоненты H_i графа G соответствующая ей помеченная S -компонента \bar{H}_i представляет собой непланарный граф.

Доказательство. Предположим обратное, а именно, предположим, что все помеченные S -компоненты графа G являются планарными. Заметим, что планарный граф можно всегда правильно вложить в плоскость так, чтобы выбранное ребро $\{x, y\}$ лежало на границе внешней грани соответствующего плоского графа \tilde{G} . Действительно, пусть в результате правильного вложения графа G в плоскость ребро $\{x, y\}$ оказалось на границе пары внутренних граней. Тогда, как показано в первом параграфе данной главы, мы всегда можем перестроить граф так, чтобы одна из этих граней стала внешней.

Возьмем тогда помеченную S -компоненту \bar{H}_1 и вложим ее в плоскость так, чтобы ребро $\{x, y\}$ принадлежало границе внешней грани (рис.80,а). Рассмотрим внутреннюю грань соответствующего \bar{H}_1 плоского графа, смежную с $\{x, y\}$. Мы всегда можем расширить эту грань так, чтобы внутрь этой грани можно было правильно вложить помеченную S -компоненту H_2 (рис.80,б).

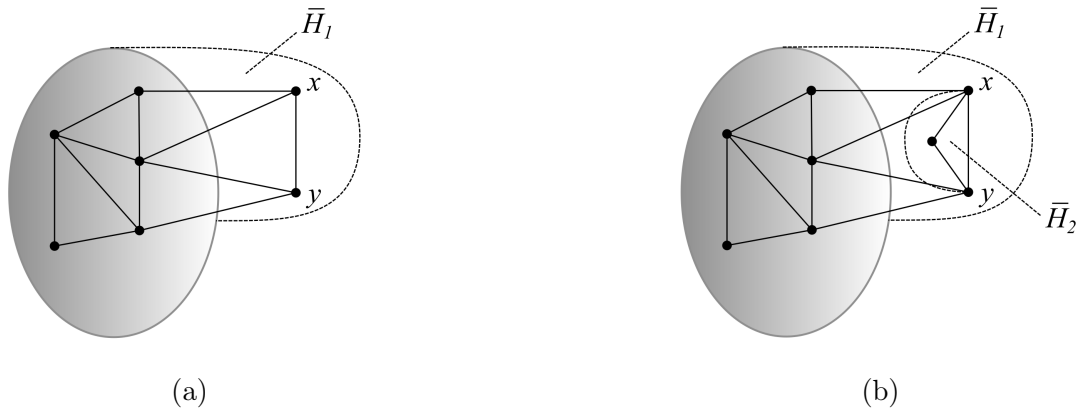


Рис. 80

Продолжая процесс далее, мы получим некоторое правильное вложение либо графа G , либо графа $G + \{x, y\}$ (в зависимости от того, присутствовало ли изначально в графе G ребро $\{x, y\}$ или нет) в плоскость, что невозможно. \square

Теперь мы, наконец, можем доказать нужное нам утверждение.

Лемма 13.14. Пусть G есть минимальный непланарный граф, в котором отсутствуют подграфы Куратовского. Тогда G обязан быть трехсвязным.

Доказательство. Мы ранее заметили, что минимальный непланарный граф как минимум двусвязен. Предположим, что он не является трехсвязным. Обозначим через $S = \{x, y\}$ вершинное разделяющее множество в таком графе. Все его помеченные S -компоненты \bar{H}_i имеют меньше ребер, чем сам граф G . Следовательно, каждая из этих помеченных компонент либо представляет собой планарный граф, либо является непланарным графом, в котором присутствует подграф Куратовского. Заметим теперь, что все помеченные S -компоненты планарными быть не могут — это противоречит доказанной выше лемме. Значит, найдется хотя бы одна помеченная S -компонента H , не являющаяся планарным графом, в которой присутствует подграф Куратовского. Покажем, однако, что это невозможно.

Действительно, у нас имеются два варианта. Первому варианту отвечает случай, когда вершины x и y соединены в G ребром. Но это означает, что G содержит помеченную компоненту H в качестве своего подграфа, то есть содержит подграф Куратовского, что противоречит выбору G . Во втором варианте вершины x и y в G ребром не соединены. Выберем тогда в G произвольную S -компоненту H' , отличную от H . В этой компоненте обязан существовать простой путь P , соединяющий вершины x и y в H' . Замена в G ребра $\{x, y\}$ на путь P приводит к появлению в G подграфа Куратовского, что опять-таки не возможно. Полученное противоречие доказывает лемму. \square

13.1.9. Теорема Куратовского не всегда удобна для практической проверки планарности того или иного графа. Немецкий математик Вагнер в 1937 году предложил еще одну, несколько более удобную характеристику планарных графов, основанную на понятии минора графа G .

Определение 13.15. Граф H называется минором графа G , если H можно получить из G удалением и/или стягиванием ребер графа G .

В качестве примера рассмотрим граф Петерсона (рис.81). Стягивая пять ребер, соединяющих внешние и внутренние вершины (показаны синим на рисунке), мы получаем граф K_5 . Следовательно, K_5 является минором графа Петерсона.

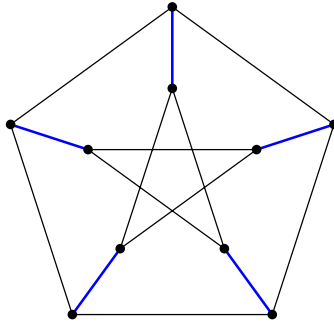


Рис. 81: Граф Петерсена

Достаточно очевидно, что удаление или стягивание ребра в планарном графе не приводит к потере планарности. Иными словами, любой минор планарного графа планарен. Так как графы K_5 и $K_{3,3}$ планарными не являются, то любой граф, имеющий хотя бы в качестве одного из своих миноров графы K_5 и $K_{3,3}$, планарным не является. Вагнер доказал, что верно и обратное утверждение.

Теорема 13.16 (Wagner, 1937). *Граф является планарным тогда и только тогда, когда графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.*

Доказательство. Так как миноры планарного графа обязательно являются планарными, то любой граф, содержащий K_5 или $K_{3,3}$ в качестве своих миноров, обязательно является непланарным.

Теперь предположим, что G является непланарным. По теореме Куратовского, G содержит подграф H , представляющий собой подразбиение K_5 или $K_{3,3}$. Стягивая в нем ребра, мы в итоге получим K_5 или $K_{3,3}$ в качестве миноров графа G . \square