Типы в языках программирования
Лекция 12. Логические системы

Денис Николаевич Москвин

СПбАУ РАН

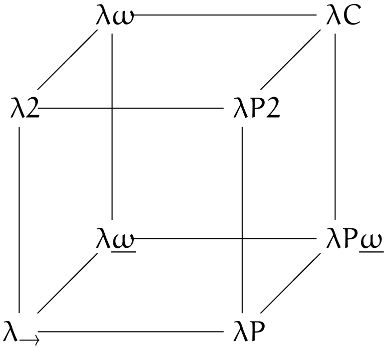
24.05.2018

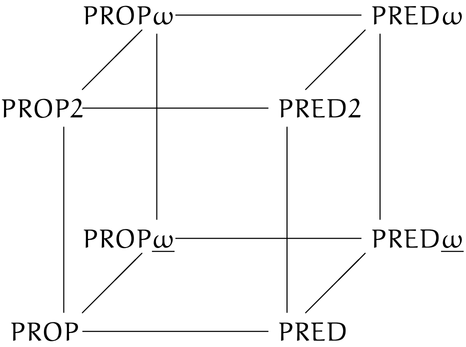
План лекции

1. Логический куб
2. Logical Framework
3. HOL
4. λHOL: выразимость логических связок

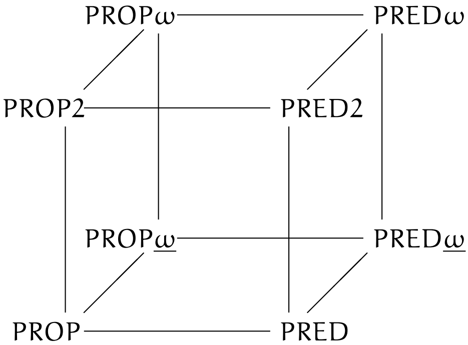
План лекции

Логический куб





Логический куб



PROP proposition logic; PROP2 second-order proposition logic; PROP$\underline{\omega}$ weakly higher-order proposition logic; PROPω higher-order proposition logic; PRED predicate logic; PRED2 second-order predicate logic; PRED$\underline{\omega}$ weakly higher-order predicate logic; PREDω higher-order predicate logic.

Логический куб: связки и кванторы

- Системы на логическом кубе задают минимальные многосортовые логики.
- Многосортовые — в предикатных логиках формулы строят из атомарных разных сортов, то есть в сигнатуру входят несколько «базовых типов».
- Минимальные — только одна связка (импликация) и один квантор (общности).
- Однако, начиная со PROP2, мы можем выразить $\bot$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$.
- Начиная с PRED2, можем выразить квантор $\exists$ и равенство Лейбница $=_L$:

$$
\begin{array}{lcl}
\exists x{:}S.\,A & \equiv & \Pi\gamma{:}{*}^p.\,(\Pi x{:}S.\,A \to \gamma) \to \gamma \\
x =_L y & \equiv & \Pi P{:}S \to {*}^p.\,P\,x \to P\,y
\end{array}
$$

Метатеория

- Пусть A — высказывание некоторой логики L.
- Пусть $[[A]]$ — интерпретация A (тип) в некоторой системе типов.
- Основные метатеоретические проблемы:
  - ***корректность*** (soundness):
    Если A — доказуемо в L, то $[[A]]$ — обитаем.
  - ***полнота*** (completness):
    Если $[[A]]$ — обитаем, то A — доказуемо в L.
- ***Корректность.***
  Имеет место для всех вершин λ-куба.
- ***Полнота.***
  - Имеет место для левой грани куба.
  - При некоторых оговорках выполняется для $\lambda\mathrm{P}$.
  - Не имеет места для $\lambda\mathrm{P}\omega$.

- Идея доказательств такая: построить PTS максимально точно описывающую логическую систему, и доказывать полноту и коррректность в два этапа.
- Например, для PRED строим эквивалентную PTS λPRED

$$\lambda P \;\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *, \square \\ \mathcal{A} & * : \square \\ \mathcal{R} & (*, *), (*, \square) \end{array}} \qquad \lambda PRED \;\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{S} & *^p, *^s, *^f, \square^p, \square^s \\ \mathcal{A} & *^p : \square^p, *^s : \square^s \\ \mathcal{R} & (*^p, *^p), (*^s, *^p), (*^s, \square^p), \\ & (*^s, *^s, *^f), (*^s, *^f, *^f) \end{array}}$$

а потом доказываем «равномощность» λPRED и λP, используя подходящее «стирающее отображение».

План лекции

Кодирование логических систем

- Два способа представления логических систем в системах типов:
  - ***Прямое представление***:
    одна система типов — одна логика;
  - ***Logical Framework*** (De Bruijn):
    одна система типов — много логик.
- Мы уже знакомы с прямым представлением: соответствие Карри-Говарда позволяло использовать $\lambda_{\rightarrow}$, $\lambda 2$, λP как логические системы.
- Logical Framework строится на основе λP. Но не обязательно!
- Логические связки и их правила введения и удаления:
  - *Прямое представление*:
    из системы типов;
  - *Logical Framework*:
    из предзаданного контекста.

- Вводится специальный *тип* для высказываний prop:

$$\mathtt{prop} : *$$

- Импликация «связывает» два высказывания

$$\Rightarrow \ : \mathtt{prop} \to \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}$$

- Импликацию будем записывать инфиксно

$$x : \mathtt{prop},\ y : \mathtt{prop} \vdash x \Rightarrow y : \mathtt{prop}$$

PROP через LF в λP (2)

- Конструктор типа (типовый оператор)

$$\mathtt{T} : \mathtt{prop} \to *$$

  «поднимает» имя высказывания $\mathtt{p} : \mathtt{prop}$ в тип его доказательства $\mathtt{T}\,\mathtt{p} : *$.

- Для $\mathtt{T}$ используют и другое обозначение $\mathbf{prf}$.
- Населенность типа $\mathtt{T}\,\mathtt{p}$ ($\mathbf{prf}(\mathtt{p})$) соответствует доказуемости высказывания $\mathtt{p}$.
- Введение и удаление импликации

$$\begin{aligned}
\mathtt{imp_intr} &: \Pi a{:}\mathtt{prop}.\,\Pi b{:}\mathtt{prop}.\,(\mathtt{T}\,a \to \mathtt{T}\,b) \to \mathtt{T}\,(a \Rightarrow b) \\
\mathtt{imp_elim} &: \Pi a{:}\mathtt{prop}.\,\Pi b{:}\mathtt{prop}.\,\mathtt{T}\,(a \Rightarrow b) \to \mathtt{T}\,a \to \mathtt{T}\,b
\end{aligned}$$

PROP через LF в λP (3)

Например, доказательство, что из a следует a:

Представление логики	Формула	Доказательство
Прямое кодирование	$a \to a$	$\lambda x{:}a.\, x$
LF-вложение	$\mathtt{T}\,(a \Rightarrow a)$	$\mathtt{imp\_intr}\; a\; a\; (\lambda x{:}\mathtt{T}\, a.\, x)$

Контекст — сигнатура для PROP:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{PROP}} \;\equiv\;\; & \mathtt{prop} : *, \\
& \mathtt{T} : \mathtt{prop} \to *, \\
& \Rightarrow \;:\; \mathtt{prop} \to \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}, \\
& \mathtt{imp\_intr} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, (\mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b) \to \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b) \\
& \mathtt{imp\_elim} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, \mathtt{T}\, (a \Rightarrow b) \to \mathtt{T}\, a \to \mathtt{T}\, b
\end{aligned}
$$

Теорема. LF-кодирование PROP в λP *корректно*, то есть

$$
\vdash_{\mathrm{PROP}} p \;\Rightarrow\; \exists\, M, a_1, \ldots, a_n.\;\; \Sigma_{\mathrm{PROP}}, a_1{:}\mathtt{prop}, \ldots, a_n{:}\mathtt{prop} \vdash_{\lambda P} M : \mathtt{T}\, p
$$

Теорема. LF-кодирование PROP в λP *полно*, то есть

$$
\Sigma_{\mathrm{PROP}}, a_1{:}\mathtt{prop}, \ldots, a_n{:}\mathtt{prop} \vdash_{\lambda P} M : \mathtt{T}\, p \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathrm{PROP}} p
$$

- ***Пример.*** Докажем, что $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$.
- Пусть $\Gamma \equiv \Sigma_{\mathrm{PROP}}, a{:}\mathtt{prop}, b{:}\mathtt{prop}$, тогда

$$
\begin{array}{rcl}
\Gamma, x{:}\mathtt{T}\,a & \vdash & (\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x) : \mathtt{T}\,b \to \mathtt{T}\,a \\
\Gamma, x{:}\mathtt{T}\,a & \vdash & \mathtt{imp\_intr}\;b\;a\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x) : \mathtt{T}\,(b \Rightarrow a) \\
\Gamma & \vdash & \lambda x{:}\mathtt{T}\,a.\,\mathtt{imp\_intr}\;b\;a\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x) : \mathtt{T}\,a \to \mathtt{T}\,(b \Rightarrow a) \\
\Gamma & \vdash & \mathtt{imp\_intr}\;a\,(b \Rightarrow a)\,(\lambda x{:}\mathtt{T}\,a.\,\mathtt{imp\_intr}\;b\;a\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x)) \\
 & & \quad : \mathtt{T}\,(a \Rightarrow (b \Rightarrow a)) \\
\Gamma & \vdash & \mathtt{imp\_intr}\;[\_]\,[\_]\,(\lambda x{:}\mathtt{T}\,a.\,\mathtt{imp\_intr}\;[\_]\,[\_]\,(\lambda y{:}\mathtt{T}\,b.\,x)) \\
 & & \quad : \mathtt{T}\,(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))
\end{array}
$$

- для справки

$$\mathtt{imp\_intr} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\,\Pi b{:}\mathtt{prop}.\,(\mathtt{T}\,a \to \mathtt{T}\,b) \to \mathtt{T}\,(a \Rightarrow b)$$

PRED через LF в λP

Контекст для логики предикатов:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{PRED}} \equiv\ & \mathtt{prop} : *,\ \mathrm{T} : \mathtt{prop} \to *,\ A : *,\ f : A \to A, \\
& \mathrm{R} : A \to A \to \mathtt{prop},\ \Rightarrow : \mathtt{prop} \to \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}, \\
& \mathtt{imp\_intr} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, (\mathrm{T}\, a \to \mathrm{T}\, b) \to \mathrm{T}\, (a \Rightarrow b), \\
& \mathtt{imp\_elim} : \Pi a{:}\mathtt{prop}.\, \Pi b{:}\mathtt{prop}.\, \mathrm{T}\, (a \Rightarrow b) \to \mathrm{T}\, a \to \mathrm{T}\, b, \\
& \forall : (A \to \mathtt{prop}) \to \mathtt{prop}, \\
& \forall\mathtt{\_intr} : \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\, (\Pi x{:}A.\, \mathrm{T}\, (P\, x)) \to \mathrm{T}\, (\forall P), \\
& \forall\mathtt{\_elim} : \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\, \mathrm{T}\, (\forall P) \to \Pi x{:}A.\, \mathrm{T}\, (P\, x)
\end{aligned}
$$

- Квантификация $\forall x \in A.\, P\, x$ представляется как $\forall(\lambda x{:}A.\, P\, x)$.
- *Предикаты — обычные функции, а не типовые операторы!*
- ***Теорема.*** LF-кодирование PRED в λP *корректно* и *полно*.

PRED через LF: пример

- ***Пример.*** Докажите, что

$$\forall z \in A.(\forall x, y \in A.\, R\,x\,y) \Rightarrow R\,z\,z$$

- ***Решение.*** Тип этого утверждения в LF:

$$\mathrm{T}(\forall(\lambda z{:}A.\,(\forall(\lambda x{:}A.\,(\forall(\lambda y{:}A.\ R\,x\,y)))) \ \Rightarrow\ (R\,z\,z)))$$

- Терм этого типа:

$$\begin{array}{l}\forall\_\mathtt{intr}\,[\_](\lambda z{:}A.\,\mathtt{imp\_intr}\ [\_]\,[\_]\,(\lambda f{:}\mathrm{T}\,(\forall(\lambda x{:}A.\,(\forall(\lambda y{:}A.\ R\,x\,y)))).\\ \qquad\qquad \forall\_\mathtt{elim}\ [\_]\,(\forall\_\mathtt{elim}\ [\_]\,f\,z)\,z))\end{array}$$

- для справки

$$\begin{array}{rcl}\mathtt{imp\_intr} & : & \Pi a{:}\mathtt{prop}.\,\Pi b{:}\mathtt{prop}.\,(\mathrm{T}\,a \to \mathrm{T}\,b) \to \mathrm{T}\,(a \Rightarrow b)\\ \forall\_\mathtt{intr} & : & \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\,(\Pi x{:}A.\,\mathrm{T}\,(P\,x)) \to \mathrm{T}\,(\forall P)\\ \forall\_\mathtt{elim} & : & \Pi P{:}A \to \mathtt{prop}.\,\mathrm{T}\,(\forall P) \to \Pi x{:}A.\,\mathrm{T}\,(P\,x)\end{array}$$

План лекции

1. Логический куб
2. Logical Framework
3. HOL
4. λHOL: выразимость логических связок

Нотация присваивания типов $\Gamma \vdash M : A$ задаётся так

Аксиомы	$\dfrac{}{\vdash c : s}$, если $(c : s) \in \mathcal{A}$
Начальное правило	$\dfrac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$, если $x \equiv {}^{s}x \notin \Gamma$
Правило ослабления	$\dfrac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma, x : B \vdash M : A}$, если $x \equiv {}^{s}x \notin \Gamma$

Здесь $s \in \mathcal{S}$, $c \in \mathcal{C}$, $x \in V$ и $A, B, M \in \Lambda$.

(продолжение далее...)

Правило произведения	$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\Pi x^A.\, B) : s_3},$$ где $(s_1, s_2, s_3) \in \mathcal{R}$
Правило применения	$$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi x^A.\, B) \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M\, N : B[x := N]}$$
Правило абстракции	$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s}{\Gamma \vdash \lambda x^A.\, M : (\Pi x^A.\, B)}$$
Правило преобразования	$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s \quad A =_\beta B}{\Gamma \vdash M : B}$$

Здесь $s, s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$, $x \in V$ и $A, B, M, N \in \Lambda$.

- λHOL — система с прямым кодированием логики.
- В LF мы определяли $\mathtt{prop}$ как тип, наряду с типами, именующими конкретные множества: $\mathtt{prop}{:}*$, $A{:}*$, $B{:}*$.
- В λHOL мы объявляем $\mathtt{prop}$ сортом (вселенной), утверждение типизации $\mathtt{prop}{:}*$ становится аксиомой PTS.
- При этом пропадает необходимость поднимать утверждения $\varphi : \mathtt{prop}$ на один уровень вверх с помощью $\mathbf{prf} : \mathtt{prop} \rightarrow *$.

$$\lambda\mathrm{HOL}\ \begin{array}{|ll|}\hline & \\ \mathcal{S} & \mathtt{prop}, *, \square \\ \mathcal{A} & \mathtt{prop}{:}*, *{:}\square \\ \mathcal{R} & (\mathtt{prop}, \mathtt{prop}), (*, \mathtt{prop}), (*, *) \\ & \\ \hline \end{array}$$

λHOL: вселенная множеств

$$\lambda\text{HOL} \quad \begin{array}{|ll|} \mathcal{S} & \texttt{prop}, *, \Box \\ \mathcal{A} & \texttt{prop}{:}*, *{:}\Box \\ \mathcal{R} & (\texttt{prop}, \texttt{prop}), (*, \texttt{prop}), (*, *) \end{array}$$

- Если проигнорировать все, что касается prop, видим обычную $\lambda_{\to}$.
- При этом $*$ — вселенная типов (множеств), ее часто называют Type или Set.
- Ее используют для определения конструкций:

$$A{:}*, B{:}* \ \vdash \ A \to B : *$$

$$A{:}*, B{:}* \ \vdash \ \lambda x^A y^B . y : A \to B \to A$$

$$\texttt{Nat}{:}*, \texttt{0}{:}\texttt{Nat}, \texttt{S}{:}\texttt{Nat} \to \texttt{Nat} \ \vdash \ \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,\texttt{0})){:}\texttt{Nat}$$

λHOL: вселенная высказываний

$$\lambda\mathrm{HOL}\ \begin{array}{|ll|} \mathcal{S} & \mathtt{prop}, *, \square \\ \mathcal{A} & \mathtt{prop}{:}*, *{:}\square \\ \mathcal{R} & (\mathtt{prop}, \mathtt{prop}), (*, \mathtt{prop}), (*, *) \end{array}$$

- Если, наоборот, проигнорировать все, что касается $\square$, видим вторую копию $\lambda_{\to}$, расширенную до $\lambda 2$.
- Правило $(\mathtt{prop}, \mathtt{prop})$ позволяет строить и доказывать импликационные формулы

$$\varphi{:}\mathtt{prop}, a{:}\varphi \vdash \Pi a^{\varphi}.\varphi : \mathtt{prop}$$

$$\varphi{:}\mathtt{prop} \vdash \varphi \to \varphi : \mathtt{prop}$$

$$\varphi{:}\mathtt{prop} \vdash \lambda a^{\varphi}.\, a : \varphi \to \varphi$$

λHOL: универсальная квантификация

$$
\lambda\mathrm{HOL}\quad
\boxed{\begin{array}{ll}
\mathcal{S} & \mathtt{prop}, *, \square \\
\mathcal{A} & \mathtt{prop}{:}*, *{:}\square \\
\mathcal{R} & (\mathtt{prop}, \mathtt{prop}), (*, \mathtt{prop}), (*, *)
\end{array}}
$$

- Если проигнорировать все, что касается $\square$, видим вторую копию $\lambda_{\to}$, расширенную до $\lambda 2$.
- Правило $(*, \mathtt{prop})$ позволяет строить и доказывать универсальные формулы (пишем $\forall$ вместо Π):

$$
\begin{array}{l}
\varphi{:}\mathtt{prop} \;\vdash\; \varphi \to \varphi : \mathtt{prop} \\
\vdash\; \forall \varphi^{\mathtt{prop}}.\, \varphi \to \varphi : \mathtt{prop} \\
\vdash\; \lambda \varphi^{\mathtt{prop}} \lambda a^{\varphi}.\, a : \forall \varphi^{\mathtt{prop}}.\, \varphi \to \varphi
\end{array}
$$

λHOL: prop живет на уровне множеств

$$
\lambda\mathrm{HOL}\ \begin{array}{|ll|}\hline & \\ \mathcal{S} & \mathtt{prop}, *, \Box \\ \mathcal{A} & \mathtt{prop}{:}*,\ *{:}\Box \\ \mathcal{R} & (\mathtt{prop},\mathtt{prop}),\ (*,\mathtt{prop}),\ (*,*) \\ & \\ \hline\end{array}
$$

- Поскольку сорт $*$ населяют не только множества, но и константа prop, правило $(*, *)$ позволяет помимо типов функций над множествами строить типы предикатов:

$$A{:}* \ \vdash\ A \to \mathtt{prop} : *$$

$$A{:}* \ \vdash\ A \to A \to \mathtt{prop} : *$$

- Более того, выразимы и типы предикатов высших порядков:

$$A{:}* \ \vdash\ (A \to A \to \mathtt{prop}) \to \mathtt{prop} : *$$

λHOL: пример

Сконструируем оператор диагонолизации предиката:

$$A{:}*, P{:}A \to A \to \mathtt{prop}, x{:}A \vdash P\,x\,x : \mathtt{prop}$$
$$A{:}*, P{:}A \to A \to \mathtt{prop} \vdash \lambda x^{A}.\,P\,x\,x : A \to \mathtt{prop}$$
$$A{:}* \vdash \lambda P^{A \to A \to \mathtt{prop}}.\,\lambda x^{A}.\,P\,x\,x : (A \to A \to \mathtt{prop}) \to A \to \mathtt{prop}$$

- По $A{:}*$ абстрагироваться нельзя, для этого нужно правило $(\Box, *)$.
- Его добавление даст неконсистентную систему λU^{-} (Coquand, Hurkens).
- Понижающие правила (a la $\lambda 2$), обладают свойством *импредикативности*.
- Много импредикативности вредно для логической консистентности!

Импредикативные PTS

$$\lambda\mathrm{U}\ \begin{array}{|ll|}\hline & \\ \mathcal{S} & \mathtt{prop}, *, \square \\ \mathcal{A} & \mathtt{prop}{:}*, *{:}\square \\ \mathcal{R} & (\mathtt{prop}, \mathtt{prop}), (*, \mathtt{prop}), (*, *), (\square, \mathtt{prop}), (\square, *) \\ & \\ \hline \end{array}$$

- Здесь три импредикативных правила, но разрушительно для консистентности только $(\square, *)$.
- λHOL получается без двух последних правил, но можно расширить предпоследним.

λHOL:: допустимые конструкции по уровням

$* : \Box$
$prop : *$, $A : *$, $B : *$, $A \to B : *$, $prop \to prop : *$ $A \to prop : *$, $(A \to A \to prop) \to prop : *$
$\varphi : prop$, $\psi : prop$, $\varphi \to \psi : prop$, $\forall \varphi^{prop}.\, \varphi \to \varphi : prop$, $\lambda y^B.\, y : B \to B$, $x : A$, $\forall x^A.\, \varphi : prop$, $P : A \to prop$, $P\, x : prop$, $\forall x^A.\, P\, x : prop$, $P\, x \to \psi : prop$
$d : \varphi$, $\lambda b^{\varphi}.\, b : \varphi \to \varphi$, $a : P\, x$, $\lambda x^A.\, a : \forall x^A.\, P\, x$

Сорта (вселенные) — $prop, *, \Box$; аксиомы — $prop : *$, $* : \Box$.
Правила — $(*, *)$, $(prop, prop)$, $(*, prop)$.

План лекции

1. Логический куб
2. Logical Framework
3. HOL
4. λHOL: выразимость логических связок

λHOL: конъюнкция

Поскольку λHOL допускает конструирование предикатов высших порядков, связки в ней выразимы стандартно

$$\vdash \ \_ \wedge \_ : \mathtt{prop} \to \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}$$
$$\_ \wedge \_ \ := \ \lambda \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\, \forall \alpha^{\mathtt{prop}}.\, (\varphi \to \psi \to \alpha) \to \alpha$$

$$\vdash \ (\_,\_) : \forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\, \varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$$
$$(\_,\_) \ := \ \lambda \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}\, a^{\varphi}\, b^{\psi}\, \alpha^{\mathtt{prop}}\, f^{\varphi \to \psi \to \alpha}.\, f\, a\, b$$

$$\vdash \ \pi_1 : \forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\, \varphi \wedge \psi \to \varphi$$
$$\pi_1 \ := \ \lambda \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}\, p^{\varphi \wedge \psi}.\, p\, \varphi\, (\lambda x^{\varphi}\, y^{\psi}.\, x)$$
$$\vdash \ \pi_2 : \forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\, \varphi \wedge \psi \to \psi$$
$$\pi_2 \ := \ \lambda \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}\, p^{\varphi \wedge \psi}.\, p\, \psi\, (\lambda x^{\varphi}\, y^{\psi}.\, y)$$

Синие аргументы в Агде (vs Хаскелл) маркируются необязательными заключением в фигурные скобки. Они автоматически выводятся компилятором при определении и вызове.

$$(\_,\_) : \{\forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\}\ \varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$$
$$(\_,\_) \ := \ \lambda a^{\varphi}\, b^{\psi}\, \alpha^{\mathtt{prop}}\, f^{\varphi \to \psi \to \alpha}.\, f\, a\, b$$

$$\pi_1 : \{\forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\}\ \varphi \wedge \psi \to \varphi$$
$$\pi_1 \ := \ \lambda p^{\varphi \wedge \psi}.\, p\, \varphi\, (\lambda x^{\varphi}\, y^{\psi}.\, x)$$

$$\pi_2 : \{\forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\}\ \varphi \wedge \psi \to \psi$$
$$\pi_2 \ := \ \lambda p^{\varphi \wedge \psi}.\, p\, \psi\, (\lambda x^{\varphi}\, y^{\psi}.\, y)$$

Следующие шаги либерализации:

- не дублировать информацию о типах аргументов;
- перенести аргументы в левую часть определения, в стиле комбинаторной логики.

λHOL: конъюнкция (3)

$$
\begin{aligned}
(\_,\_) &: \{\forall \varphi^{prop}\, \psi^{prop}.\}\ \varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi \\
(a, b) &:= \lambda \alpha^{prop}\, f^{\varphi \to \psi \to \alpha}.\, f\, a\, b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &: \{\forall \varphi^{prop}\, \psi^{prop}.\}\ \varphi \wedge \psi \to \varphi \\
\pi_1\ p &:= p\, \varphi\, (\lambda x^{\varphi}\, y^{\psi}.\, x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &: \{\forall \varphi^{prop}\, \psi^{prop}.\}\ \varphi \wedge \psi \to \psi \\
\pi_2\ p &:= p\, \psi\, (\lambda x^{\varphi}\, y^{\psi}.\, y)
\end{aligned}
$$

Теперь можно забыть о том, что конъюнкция «закодирована», рассматривая эти функции как примитивы.

- Докажите $\forall \varphi^{prop}\, \psi^{prop}.\ \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$.
- Определите связку $\leftrightarrow$ и докажите $\forall \varphi^{prop}\, \psi^{prop}.\ \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$.

λHOL: дизъюнкция

$$\_ \vee \_ : \texttt{prop} \to \texttt{prop} \to \texttt{prop}$$
$$\varphi \vee \psi \;:=\; \forall \alpha^{\texttt{prop}}.\, (\varphi \to \alpha) \to (\psi \to \alpha) \to \alpha$$

$$\texttt{injL} : \{\forall \varphi^{\texttt{prop}}\, \psi^{\texttt{prop}}.\}\ \varphi \to \varphi \vee \psi$$
$$\texttt{injL}\ x \;:=\; \lambda \alpha^{\texttt{prop}}\, f^{\varphi \to \alpha}\, g^{\psi \to \alpha}.\, f\, x$$

$$\texttt{injR} : \{\forall \varphi^{\texttt{prop}}\, \psi^{\texttt{prop}}.\}\ \psi \to \varphi \vee \psi$$
$$\texttt{injR}\ y \;:=\; \lambda \alpha^{\texttt{prop}}\, f^{\varphi \to \alpha}\, g^{\psi \to \alpha}.\, g\, y$$

$$\texttt{match} : \{\forall \varphi, \psi, \rho^{\texttt{prop}}.\}(\varphi \to \rho) \to (\psi \to \rho) \to \varphi \vee \psi \to \rho$$
$$\texttt{match}\ f\ g\ u \;:=\; u\, \rho\, f\, g$$

Докажите следующие утверждения:

$$\vee - \texttt{comm} : \{\forall \varphi^{\texttt{prop}}\, \psi^{\texttt{prop}}.\}\ \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$$
$$\wedge - \texttt{rdist} - \texttt{on} - \vee : \{\forall \varphi, \psi, \rho^{\texttt{prop}}.\}\ (\varphi \vee \psi) \wedge \rho \leftrightarrow \varphi \wedge \rho \vee \psi \wedge \rho$$

$$\bot : \mathtt{prop}$$
$$\bot \;:=\; \forall \alpha^{\mathtt{prop}}.\, \alpha$$

$$\top : \mathtt{prop}$$
$$\top \;:=\; \forall \alpha^{\mathtt{prop}}.\, \alpha \to \alpha$$

$$\neg\_ : \mathtt{prop} \to \mathtt{prop}$$
$$\neg\,\varphi \;:=\; \varphi \to \bot$$

Докажите законы де Моргана

$$\mathtt{deMorgan}_1 : \{\forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\}\, \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\mathtt{deMorgan}_{21} : \{\forall \varphi^{\mathtt{prop}}\, \psi^{\mathtt{prop}}.\}\, \neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$$

В обратную сторону конструктивно недоказуем.

λHOL: квантор существования

Фиксируем контекст $A\!:\!*$ (обычно это задается в сигнатуре логики).

$$\exists : (A \to \mathtt{prop}) \to \mathtt{prop}$$
$$\exists \;:=\; \lambda P^{A\to\mathtt{prop}}.\,\forall\alpha^{\mathtt{prop}}.\,(\forall x^{A}.\,P\,x \to \alpha) \to \alpha$$

$$\langle\_,\_\rangle : \{\forall P^{A\to\mathtt{prop}}.\}\forall x^{A}.\,P\,x \to \exists(\lambda x^{A}.\,P\,x)$$
$$\langle\_,\_\rangle \;:=\; \lambda x^{A}\,v^{P\,x}.\,\lambda\alpha^{\mathtt{prop}}\,f^{\forall x^{A}.\,P\,x\to\alpha}.\,f\,x\,v$$

$$\exists-\mathtt{elim} : \{\forall P^{A\to\mathtt{prop}}\;\varphi^{\mathtt{prop}}.\}\exists(\lambda x^{A}.\,P\,x) \to (\forall x^{A}.\,P\,x \to \varphi) \to \varphi$$
$$\exists-\mathtt{elim} \;:=\; \lambda u^{\exists P}\,v^{\forall x^{A}.\,P\,x\to\varphi}.\,u\,\varphi\,v$$

Альтернативные способы обозначения $\exists(A,P)$, $\exists x : A.\,P\,x$. (Импредикативные системы с *сильной* суммой быстро становятся неконсистентными.)

λHOL: равенство Лейбница

$$A{:}* \ \vdash \ \_ \equiv_A \_ : A \to A \to \mathtt{prop}$$
$$x \equiv_A y \ := \ \forall P^{A \to \mathtt{prop}}.\, P\,x \to P\,y$$

Докажите следующие утверждения:

$$\equiv_A\!-\mathtt{refl} : \forall x^A.\, x \equiv_A x$$
$$\equiv_A\!-\mathtt{trans} : \forall x^A\, y^A\, z^A.\, x \equiv_A y \to y \equiv_A z \to x \equiv_A z$$
$$\equiv_A\!-\mathtt{symm} : \forall x^A\, y^A.\, x \equiv_A y \to y \equiv_A x$$

Последнее требует некоторого ухищрения.