

# Домашнее задание №11

Группа 504

Количество баллов на зачёт: **8.5**

- (0.5 балла)* Найти количество совершенных паросочетаний в колесе  $W_n$ .
- (1 балл)* Пусть  $S$  есть подмножество множества  $V(G)$  вершин графа  $G$ , покрытое некоторым паросочетанием  $M$ . Доказать, что некоторое максимальное паросочетание также покрывает все вершины этого множества. Верно ли, что данный факт будет выполняться для любого максимального паросочетания?
- (1.5 балла)* Пусть  $M$  и  $N$  есть два паросочетания в графе  $G$ , такие, что  $|N| > |M|$ . Доказать, что существуют паросочетания  $M'$  и  $N'$ , такие, что  $|M'| = |M| + 1$ ,  $|N'| = |N| - 1$ ,  $M' \cup N' = M \cup N$  и  $M' \cap N' = M \cap N$ .
- (1 балл)* Определить числа  $\alpha(G)$ ,  $\alpha'(G)$ ,  $\beta(G)$  и  $\beta'(G)$  для графа  $G = K_{n,m}$ ,  $n \leq m$ .
- (1.5 балла)* Определить минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в простом цикле  $C_{11}$ , построенном на одиннадцати вершинах. Чему будет равен этот размер в случае произвольного простого цикла  $C_n$ ?
- (1.5 балла)* Доказать, что для любого наибольшего по включению паросочетания  $M$  в графе  $G$  выполняется неравенство  $2|M| \geq \beta(G)$ . Заметим, что с учетом слабой оптимальности отсюда следует справедливость следующих неравенств:

$$\alpha'(G) \leq \beta(G) \leq 2\alpha'(G).$$

- (1.5 балла)* Доказать, что для любого графа  $G$  без изолированных вершин (то есть для любого графа  $G$  с  $\delta(G) > 0$ ) справедливо неравенство  $\alpha(G) \cdot \delta(G) \leq m$ , где  $m$  — количество ребер в графе  $G$ .
- (1.5 балла)* Доказать, что граф  $G$  является двудольным тогда и только тогда, когда любой подграф  $H \leq G$  имеет вершинно независимое множество  $S$ , размер  $|S|$  которого больше или равен  $|V(H)|/2$ .
- (1.5 балла)* Доказать, что для любого графа  $G$  справедливо неравенство

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1},$$

где  $n = |V(G)|$ ,  $\Delta(G)$  — максимальная из степеней вершин в графе  $G$ .

- (2.5 балла)* Доказать, что для любого простого графа  $G$  с  $|V(G)| = n \geq 2\delta(G)$ , где  $\delta(G)$  — минимальная степень вершины в  $G$ , справедливо неравенство

$$\alpha'(G) \geq \delta(G).$$