Теория графов (ДЗ).

15 марта 2017 г.

1. Рассмотрим невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел
$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0.$$
Доказать, что такая последовательность является степенной последовательностью некоторого графа G без петель тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число и выполняется неравенство
$$d_1 \leq d_2 + d_3 + \ldots + d_n$$

2. Доказать, что для произвольного турнира T справедливо равенство
$$\sum_{x \in V(T)} outdeg(x)^2 = \sum_{x \in V(T)} indeg(x)^2.$$

3. Орграф D называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство
$$|outdeg(x) - indeg(x)| \leq 1.$$
Доказать, что из любого неориентированного графа G можно получить направленный сбалансированный орграф D.

4. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: если любая вершина графа имеет степень 2, то граф G является циклом (определение).

5. Минимальная степень вершины в графе G, построенном на восьми вершинах, равна четырем. Доказать, что любые две вершины в таком графе G либо являются смежными, либо соединены путем длины 2.

6. Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.

7. Доказать, что простой граф G, построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.

8. Доказать, что в простом графе с $\Delta = n - 2$ и диаметром 2 количество ребер $m \geq 2n - 4$ (определения).

9. Пусть G есть простой граф, диаметр которого $diam(G) \geq 3$. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ имеет диаметр $diam(\bar{G}) \leq 3$ (определения).

10. Пусть G есть простой граф, диаметр которого $diam(G) > 3$. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ имеет диаметр $diam(\bar{G}) < 3$. Вывести отсюда, что любой самодополненный граф G имеет диаметр $diam(G) \leq 3$. Для каждого $k = 0, 1, 2, 3$ привести пример самодополненного графа, имеющего данный диаметр, в случае, если таковой существует (определения).

Для зачета по теме необходимо решить 5 задач.