Практика 06.10.2017

1. (1,5 балла) Прямоугольная матрица M размерами $n \times m$ называется вполне унимодулярной, если определитель любой ее квадратной подматрицы принимает значения из множества $\{0, +1, -1\}$. Доказать, что матрица инцидентности $\mathbf{M_i}$ орграфа D является вполне унимодулярной матрицей. Что можно сказать о матрицах $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, составленных из базисных векторов пространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, а также о матрице Кирхгофа $\mathbf{K}$ орграфа D?

2. (2 балла) Доказать, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда его матрица инцидентности $\mathbf{M_i}$ является вполне унимодулярной.

3. (1,5 балла) В параграфе, посвященном матричной теореме о деревьях, мы доказали следующее утверждение. Пусть S есть произвольный набор из $(n-1)$-го ребра орграфа D, а B_S есть подматрица базисной матрицы , столбцы которой отвечают ребрам из набора S. Определитель $\det(B_S) \neq 0$ тогда и только тогда, когда индуцированный S подграф T соответствующего D графа G представляет собой остовное дерево G. Доказать это утверждение, используя полученные в данном параграфе результаты.

4. (1,5 балла) Пусть D есть связный орграф, B — базисная матрица пространства $\mathcal{B}$. С использованием результатов данного параграфа и предыдущего упражнения доказать, что количество $t(D)$ остовных деревьев рассчитывается по формуле

$$t(D) = \det(B \cdot B^T).$$

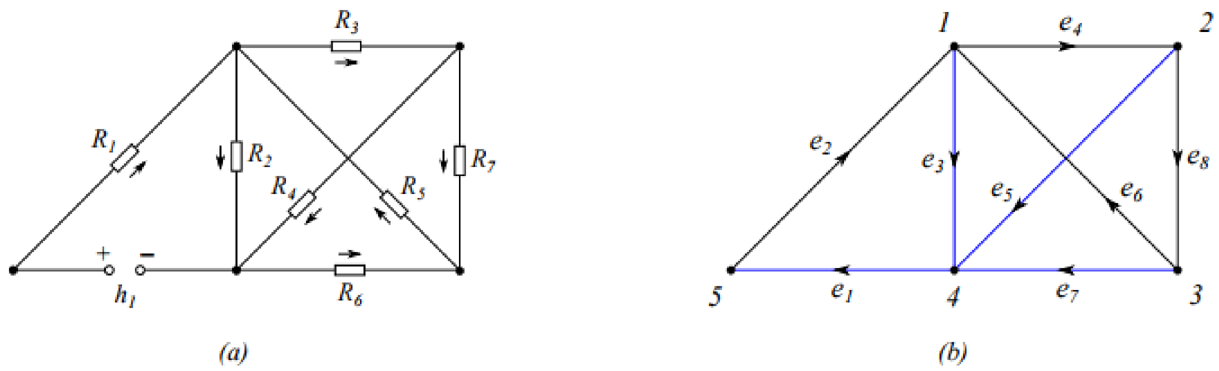

Рис. 1

5. (1,5 балла) Для электрической цепи, показанной на рис.1,a, а также для соответствующего ей орграфа, показанного на рис.1,b, найти токи в цепи в случае, когда все сопротивления R_j, $j = 2, \ldots, 8$, равны единице, а напряжение $h = 12$.

6. (2 балла) Определить токи в орграфе, показанном на рис.2, при условии, что все сопротивления равны единице, а между вершинами x и y имеется электродвижущая сила h, величина которой равна 61. Используя этот результат, построить соответствующую полученному взвешенному орграфу D квадрангуляцию прямоугольника.

7. (1 балл) Рассечение плоскости квадратами, при котором ровно один квадрат имеет сторону, равную числу Фибоначчи F_i, называется фибоначчиевым замощением плоскости. Построить подобное замощение.

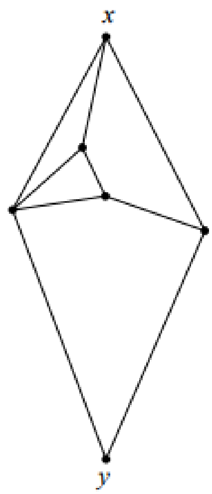

Рис. 2

8. (1 балл) Совершенным кубом называется куб, разбитый на более мелкие кубики попарно различных размеров. Доказать, что совершенный куб существовать не может.