Задание по матанализу на 16 октября

1. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, $K_1, K_2, \dots$ — последовательность компактных подмножеств в X, фундаментальная в метрике Хаусдорфа. Определим K как множеств таких точек $x \in X$, что $\lim_n \rho(x, K_n) = 0$. Докажите, что

а) (2) K компактно; б) (2) $K = \lim K_n$ в метрике Хаусдорфа.

2. (3) Докажите, что для любого открытого покрытия метрического компакта K найдется такое $c > 0$, что любое множество диаметра меньше, чем c, содержится целиком в одном из элементов покрытия.

3. (1) Докажите, что если последовательность x_n точек метрического пространства (X, ρ) удовлетворяет свойству $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \rho(x_i, x_{i+1}) < +\infty$ (т.е. последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, x_{i+1})$ ограничена), то x_n — последовательность Коши (=фунадментальная последовательность=сходящаяся в себе последовательность).

Определение. Подмножество A метрического пространства (X, ρ) называется ε-разделенным, если $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ для любых разных $x, y \in A$.

4. (1) Пусть A — конечная ε-сеть в X (то есть открытые шары радиуса ε с центрами в точках A покрывают X), а B — 2ε-разделенное множество в X. Докажите, что $|B| \leq |A|$.

5. (2) Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ — два непересекающихся подмножества, причем X — компактное, а Y — замкнутое. Обязательно ли существует $d > 0$, такое что $\rho(x, y) > d$ для любых $x \in X, y \in Y$.

6. (1) Пусть K — компактное подмножество пространства (X, ρ), а $U \subset X$ —- открытое подмножество такое, что $K \subset U$. Докажите, что для некоторого $\varepsilon > 0$ множество U содержит ε-окрестность множества K.

7. а) (4) Пусть (K, ρ) — компакт, отображение $f : K \to K$ таково, что $\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y)$ при всех $x, y \in K$. Докажите, что f — биекция и на самом деле имеет место равенство $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$.

б) (4) Пусть (K, ρ) — компакт, сюръективное отображение $f : K \to K$ таково, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$ при всех $x, y \in K$. Докажите, что f — биекция и на самом деле имеет место равенство $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$.