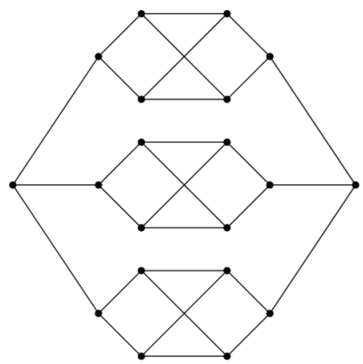
Домашнее задание по гамильтоновым путям и циклам с 22.09.2017 на 6.10.2017

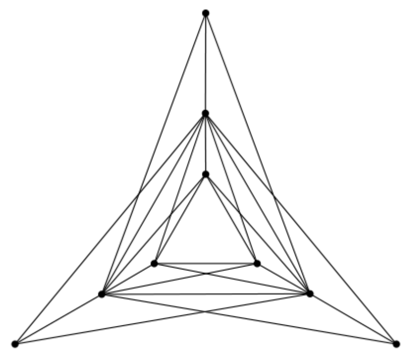
Для немедленного зачёта по теме достаточно набрать **7,5** баллов.

1. (1) Подсчитать количество гамильтоновых циклов в полном двудольном графе $K_{n,n}$, $n > 1$.

2. (1) Используя необходимые условия существования гамильтонова цикла в графе, докажите, что в графах, изображенных на рисунке, гамильтоновых циклов не существует.



(a)



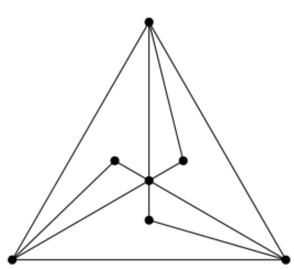
(b)

3. (2) Доказать, что для шахматной доски размерами 3×8 невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

4. (1) Доказать, что в случае шахматной доски размерами $m \times n$ невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход, в случае, если m и n являются нечетными числами.

5. (1,5) Докажите, что в любом связном графе с $n \geqslant 3$ вершинами можно обойти все вершины, пройдя в сумме не более чем по $2n - 4$ ребрам.

6. (1) Рассмотрим граф, изображенный на рисунке. Доказать, что в нем существует гамильтонов путь. Доказать, что гамильтонов цикл в таком графе не существует.



7. (2,5) Обозначим через $h(D)$ количество гамильтоновых путей в простом орграфе D. Доказать, что для орграфа D и орграфа $\bar{D}$, являющегося дополнением к D до полного орграфа, построенного на n вершинах (то есть орграфа, в котором любые две вершины соединены между собой парой разнонаправленных ребер), справедливо равенство

$$h(D) \equiv h(\bar{D}) \pmod 2.$$

Указание. Использовать принцип включений-исключений.

8. (2) Доказать, что любой турнир имеет нечетное количество гамильтоновых путей.

   Указание. Доказать, что при замене ориентации произвольного ребра e турнира на противоположное четность количества гамильтоновых путей остается неизменным. Для этого, в свою очередь, воспользоваться результатами предыдущего упражнения.