k-связные графы. Теорема Менгера

Практика

20 октября 2017 г.

1. (1.5 балла). Предположим, что в связном графе G, построенном на $n \geqslant 2$ вершинах, нашлась пара вершин, не лежащих на одном цикле. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:
   (a) Возможна ситуация, когда все ребра графа похожи.
   (b) Существует полный граф с описанным в задаче свойством.
   (c) Если граф построен на трех вершинах, то ровно одна из них является точкой сочленения.
   (d) При числе ребер $m > 1$ каждое ребро обязано быть похожим хотя бы на одно другое.
   (e) В графе обязательно найдется вершина степени 1.
   (f) Граф может быть двусвязным.
   (g) Если граф построен на десяти вершинах, то в нем есть непохожие ребра.

2. (0.5 балла). Выразить количество n вершин односвязного графа G через количество n_i этих вершин в каждом из k блоков $B_1, \ldots, B_k$ графа G.

3. (0.5 балла). Выразить количество остовных деревьев односвязного графа G через количество остовных деревьев в каждом из k блоков $B_1, \ldots, B_k$ графа G.

4. (1.5 балла). Граф называется кактусом, если каждый его блок представляет собой либо одиночное ребро, либо единственный цикл. В частности, любое дерево является кактусом. Предъявить кактусы, построенные на $2k + 1$ и $2k$ вершинах соответственно и имеющие максимальное количество ребер. Доказать, что кактусы с большим количеством ребер при фиксированном k построить невозможно.

5. (1 балл). Доказать, что любая вершина односвязного графа G имеет четную степень тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа эйлеров.

6. (1 балл). Доказать, что вершинно односвязный граф G является реберно k-связным тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа реберно k-связный.

7. (0.5 балла). Пусть G есть вершинно двусвязный граф, и пусть вершины x и y этого графа соединены в G путем P. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: в графе G найдется путь Q, соединяющий x и y и не пересекающийся с P ни в каких внутренних вершинах этого пути.

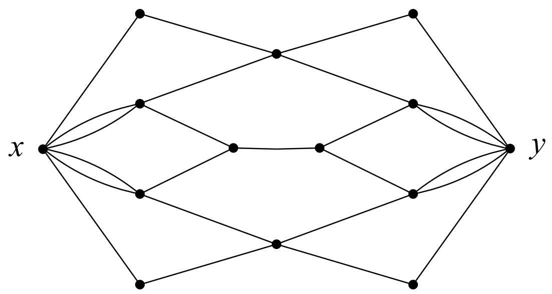

Рис. 1

8. (1 балл). Определить размер $\kappa(x, y)$ вершинного и $\lambda(x, y)$ реберного разделяющих x и y множеств для графа G, показанного на рис.1.

9. (1 балл). Пусть D есть орграф, построенный на множестве вершин $[12] = \{1, 2, \ldots, 12\}$, в котором из i в j проведено ребро тогда и только тогда, когда i делит j. Определить $\kappa(1, 12)$ и $\lambda(1, 12)$ в таком графе.

10. (1.5 балла). С помощью теоремы Менгера доказать вершинную k-связность k-мерного гиперкуба Q_k.

11. (1.5 балла). Пусть G вершинно k-связен. Образуем из G новый граф G' путём добавления к G новой вершины y и не менее k рёбер из y в k различных вершин графа G. Доказать, что G' также k-связен.

12. (2 балла). Доказать, что после удаления произвольного ребра $e = (x, y)$ в орграфе D вершинная связность κ этого орграфа уменьшится как максимум на единицу, то есть что $\kappa(D - e) \geqslant \kappa(D) - 1$.

13. (1.5 балла). Назовем k-веером из вершины x в множество Y набор из k путей, начинающихся в x, заканчивающихся в Y, и не имеющих никаких общих вершин, кроме вершины x. Пусть G есть k-связный граф, x — некоторая его вершина, а Y — набор из не менее чем k вершин графа G, не включающий x. Доказать, что тогда существует k-веер из x в Y.