

## Исчисление высказываний.

1. Докажите, что для любых формул  $A, B, C$  формула

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

выводима в исчислений высказываний.

2. Докажите, что если  $\Gamma \vdash A$  и  $\Gamma_2, A \vdash B$ , то  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B$ .
3. Докажите, что формула  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ , так же как и обратная к ней формула (в которой посылка и заключение переставлены), являются теоремами исчисления высказываний. Докажите аналогичное утверждение про формулы  $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$  и  $((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \wedge C))$ .
4. Докажите, что следующие формулы, а также обратные к ним (меняем местами посылку и заключение) являются теоремами исчисления высказываний:

$$((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)),$$

$$((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge C),$$

$$((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C).$$

5. Выведите формулы  $A \rightarrow \neg\neg A$  и  $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ .
6. Докажите, что наличие аксиомы исключенного третьего (11) аксиома (10) является лишней – её можно вывести из остальных аксиом.
7. Добавим к исчислению высказываний, помимо правила modus ponens, еще одно правило, называемое правилом подстановки. Оно разрешает заменить в выведенной формуле все переменные на произвольные формулы (естественно, вхождения одной переменной должны заменяться на одну и ту же формулу). Покажите, что после добавления такого правила класс выводимых формул не изменится, но теорема о дедукции перестанет быть верной.
8. Докажите, что формула  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$  является теоремой исчисления высказываний.
9. Исключим из числа аксиом исчисления высказываний закон исключенного третьего, заменив его на закон снятия двойного отрицания. Покажите, что от этого класс выводимых формул не изменится.