1 Мощности

1.1 Равномощные множества

Определение 1.1 *Два множества называются* РАВНОМОЩНЫМИ *если между ними существует взаимооднозначное соответствие(биекция).*

Пример 1.2 *Отрезки* $[0,1]$ *и* $[0,2]$ *равномощны,* $(0,1)$ *и* $(0,+\infty)$ *равномощны.*

Утверждение 1.3 *Равномощность является отношением эквивалентности, то есть рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Пример 1.4

- *Множество бесконечных последовательностей равномощно множеству всех подмножеств натуральных чисел.*
- *Множество бесконечных последовательностей состоящих из* $0,1,2,3$ *равномощно множеству бесконечных последовательностей состоящих из* $0,1$.
- *Множество бесконечных последовательностей состоящих из* $0,1,2$ *равномощно множеству бесконечных последовательностей состоящих из* $0,1$. *(теорема Кантора-Бернштейна)*
- $P(U)$ *равномощно множеству функций* $U \to \{0,1\}$.

1.2 Счётные множества

Определение 1.5 *Множество называется* СЧЁТНЫМ *если оно равномощно множеству натуральных чисел.*

Теорема 1.6

1. *Подмножество счётного множества конечно или счетно.*
2. *Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.*
3. *Объединение конечного или счетного множества счетных множеств будет конечным или счетным.*

Доказательство

1. *Выпишем последовательность, затем составим подпоследовательность.*
2. *Выберем постепенно по одному элементу.*
3. *Обойдём бесконечный квадрат треугольничком(по диагоналям).*

Пример 1.8 *Примеры счётных множеств:*

- $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{N}^k$.
- *Множество конечных последовательностей натуральных чисел.*
- *Множество алгебраических чисел.*
- *Множество периодических дробей.*

Теорема 1.9 *Если* A *— бесконечно, а множество* B *конечно или счетно, то* $A \cup B$ *равномощно* A.

Доказательство *Выделим счетное* P *в* A. P *равномощно* $P \cup B$, *а значит* $P \cup (A \setminus P)$ *равномощно* $P \uplus B \cup (A \setminus P)$.

Теорема 1.11 *Отрезок* $[0,1]$ *равномощен множеству всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц.*

Доказательство *Рассмотреть запись числа в двоичной системе счисления.*

Теорема 1.13 *Квадрат равномощен отрезку.*

Доказательство *Отобразим пару* $(x_0x_1x_2\dots,y_0y_1y_2\dots)$ *в* $(x_0y_0x_1y_1x_2y_2\dots)$.

Следствие 1.15 R^k *равномощно* R.

Определение 1.16 *Мощность множества действительных чисел называется* мощностью континуума.

Отметим, что пока мы еще не доказвали, что множество действительных чисел несчётно.

1.3 Теорема Кантора-Бернштейна

Определение 1.17 *Говорят, что множество* A *по мощности не больше множества* B, *если оно равномощно некоторому подмножеству множества* B.

Свойства отношения иметь мощность не больше:

1. Если A и B равномощны, то A имеет мощность не больше B.
2. Транзитивность.
3. Если A имеет мощность не больше B и B имеет мощность не больше A, то они равномощны(теорема Кантора-Бернштейна).
4. Для любых множеств A, B верно хотя бы одно или A имеет мощность не больше B, или B имеет мощность не больше A(невозможно в виду трансфинитной индукции, но мы это доказывать не будем).

Теорема 1.18 (Кантора-Бернштейна) *Если множество* A *равномощно некоторому подмножеству множества* B, *а* B *равномощно некоторому подмножеству* A, *то множества* A *и* B *равномощны.*

Доказательство *Сводим к ситуации* $A_2 \subset A_1 \subset A_0 = A$, *где* A_2 *равномощно* A.

Рассмотрим биекцию f, *такую что* $A_2 = f(A_0)$. *Построим* $A_{i+1} = f(A_{i-1})$ $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \dots$.

Обозначим $C_i = A_i \setminus A_{i+1}$ *и* $C = \bigcap A_i$. *Заметим, что все* C_{2j} *равномощны, поскольку* f *переводит* C_{2j} *в* C_{2j+2}. *Все оставим на своих местах только множества* C_2j *отобразим в* C_{2j+2}. *Тогда* $A_0 = C_0 \cup C_1 \dots$ *перейдет в* $A_1 = C_1 \cup C_2 \dots$.

Альтернативное доказательство рассмотрим минимальное X такое, что

$$X \supset 1 \setminus A + f(X)$$

— пусть минимум достигается на M. Тогда на M определим функцию как f, а вне M как тождественную.

1.4 Теорема Кантора

Теорема 1.20 (Кантора) *Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно.*

Доказательство *Применить прием диагонализации.*

Следствие 1.22 *Трансцендентные(неалгебраические) числа существуют.*

Следствие 1.23 *Множество натуральных чисел неравномощно множеству своих подмножеств.*

Теорема 1.24 (общая формулировка теоремы Кантора) *Никакое множество* X *не равномощно множеству всех своих подмножеств.*

Доказательство *Предположим противное. Рассмотрим* $Z = \{x \in X | x \notin \phi(x)\}$. *Тогда* Z *не соответствует ни один элемент, покажем это. Пусть* $Z = \phi(z)$. *Тогда*

$$z \in Z \Leftrightarrow z \notin \phi(z) \Leftrightarrow z \notin Z.$$

Первое равенство по построению множества Z, *второе по предположению* $\phi(z) = Z$.