

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 14. Рекурсивные функции

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

16.12.2014

- 1 Прimitивно рекурсивные функции
- 2 Прimitивная рекурсия и машины Тьюринга
- 3 Частично рекурсивные функции
- 4 Общерекурсивные функции

- 1 Прimitивно рекурсивные функции
- 2 Прimitивная рекурсия и машины Тьюринга
- 3 Частично рекурсивные функции
- 4 Общерекурсивные функции

- Базисные функции:
 - константа 0;
 - функция следования: $s(x) = x + 1$;
 - семейство функций проекции: $\pi_k^i(x_1, \dots, x_k) = x_i$.
- Операции:
 - подстановка

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

- примитивная рекурсия

$$h(x_1, \dots, x_k, 0) = f(x_1, \dots, x_k)$$

$$h(x_1, \dots, x_k, s(y)) = g(x_1, \dots, x_k, y, h(x_1, \dots, x_k, y))$$

- Мы показали, что сложение, умножение, усеченное вычитание примитивно рекурсивны, а также что пересечение, объединение и дополнение примитивно рекурсивных множеств примитивно рекурсивны.
- Ограниченные кванторы, примененные к примитивно рекурсивным предикатам дают примитивно рекурсивные предикаты:

$$S(x, z) = \forall y \leq z. R(x, y)$$

$$T(x, z) = \exists y \leq z. R(x, y)$$

- Пусть график функции $f(x)$ примитивно рекурсивен, а ее значения ограничены сверху примитивно рекурсивной $g(x)$. Тогда f примитивно рекурсивна.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{N}\}$$

- Действительно, рассмотрим характеристическую функцию графика $r(x, y)$, тогда

$$f(x) = \sum_{y=0}^{\infty} r(x, y)y = \sum_{y=0}^{g(x)} r(x, y)y$$

А конечная сумма примитивно рекурсивна.

- Введем для предиката $P(x)$ *ограниченный оператор минимизации* $\mu x < z. P(x)$. Он возвращает наименьший x строго меньше z , для которого этот предикат выполняется, или z , если такого x нет.
- Пусть функция $g(x)$ и предикат $P(x, y)$ примитивно рекурсивны. Тогда примитивно рекурсивна функция

$$f(x) = \mu y < g(x). P(x, y)$$

- Действительно, график $f(x)$ легко описать ограниченными кванторами

$$\begin{aligned} P(x, y) = 1 & \wedge \forall z < y P(x, z) = 0 & \vee \\ y = g(x) & \wedge \forall z < y P(x, z) = 0 \end{aligned}$$

Примитивно рекурсивная нумерация пар

- Хотим по паре $\langle x, y \rangle$ примитивно рекурсивно задавать ее номер $[x, y]$ и, наоборот, по номеру $[x, y]$ находить значения элементов пары $x = p_1([x, y])$, $y = p_2([x, y])$.

Примитивно рекурсивная нумерация пар

- Хотим по паре $\langle x, y \rangle$ примитивно рекурсивно задавать ее номер $[x, y]$ и, наоборот, по номеру $[x, y]$ находить значения элементов пары $x = p_1([x, y])$, $y = p_2([x, y])$.
- Есть много подходящих способов нумерации:

$$[x, y] = (2x + 1)2^y - 1$$

$$[x, y] = 2^x 3^y$$

...

- Почему $p_1(n)$ и $p_2(n)$ будут примитивно рекурсивны?

Примитивно рекурсивная нумерация пар

- Хотим по паре $\langle x, y \rangle$ примитивно рекурсивно задавать ее номер $[x, y]$ и, наоборот, по номеру $[x, y]$ находить значения элементов пары $x = p_1([x, y])$, $y = p_2([x, y])$.
- Есть много подходящих способов нумерации:

$$[x, y] = (2x + 1)2^y - 1$$

$$[x, y] = 2^x 3^y$$

...

- Почему $p_1(n)$ и $p_2(n)$ будут примитивно рекурсивны?

$$p_1(n) = \mu x \leq n. \exists y \leq n. [x, y] = n$$

$$p_2(n) = \mu y \leq n. \exists x \leq n. [x, y] = n$$

- Пусть унарные функции f и g заданы равенствами

$$\begin{aligned}f(0) &= a \\g(0) &= b \\f(s(n)) &= F(n, f(n), g(n)) \\g(s(n)) &= G(n, f(n), g(n))\end{aligned}$$

где a и b — числа, а F и G — бинарные примитивно рекурсивные функции. Тогда f и g примитивно рекурсивны.

- **Доказательство.**

$$\begin{aligned}h(0) &= [a, b] \\h(s(n)) &= [F(n, p_1(h(n)), p_2(h(n))), \\&\quad G(n, p_1(h(n)), p_2(h(n)))]\end{aligned}$$

$$f(x) = p_1(h(x)), \quad g(x) = p_2(h(x)). \quad \blacksquare$$

- Пусть $g(x)$ и $h(x, y)$ — унарная и бинарная примитивно рекурсивные функции, причем $g(x) < x$ при положительных x . Тогда унарная функция f , заданная равенствами

$$f(0) = a$$

$$f(n) = h(n, f(g(n)))$$

примитивно рекурсивна.

- **Доказательство.** (см. Верещагина и Шеня)
- Мораль: при определении примитивной рекурсии можно использовать не только предыдущее, но и любое меньшее значение.

- 1 Прimitивно рекурсивные функции
- 2 Прimitивная рекурсия и машины Тьюринга**
- 3 Частично рекурсивные функции
- 4 Общерекурсивные функции

Примитивно рекурсивное кодирование машины Тьюринга

- *Конфигурация* машины Тьюринга это:
 - содержимое ленты;
 - положение считывающего устройства;
 - текущее состояние.
- Можем закодировать в виде тройки (l, r, q) , где l и r — списки, задающие левую и правую части ленты, а q — номер состояния.
- Если $|\Sigma| = k$, то списки удобно кодировать в системе счисления с основанием k в виде полинома

$$a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \dots + a_n k^n$$

- При этом стандартные для машины Тьюринга операции легко выражаются через примитивно-рекурсивные `push`, `pop` и `top`.

Примитивно рекурсивное кодирование машины Тьюринга (2)

- Умеем кодировать конфигурацию машины Тьюринга как тройку (l, r, q) , ее кодируем числом $K = [[l, r], q]$.
- Шаг машины Тьюринга кодируем примитивно рекурсивной $K' = \text{Step}(K)$.
- Конфигурацию через n шагов кодируем примитивно рекурсивной $K' = n\text{Step}(K, n)$.
- Построение начальной конфигурации по входу и выхода по финальной конфигурации кодируем примитивно рекурсивными $K = \text{Init}(x)$ и $y = \text{Result}(k)$.

Примитивная рекурсивное кодирование машины Тьюринга (3)

- **Теорема.** Пусть f — вычислимая на машине Тьюринга функция, и число шагов до остановки на входе x не превышает $g(x)$, где $g(x)$ — некоторая примитивно рекурсивная функция. Тогда $f(x)$ — примитивно рекурсивная функция.
- **Доказательство.**

$$f(x) = \text{Result}(\text{nStep}(\text{Init}(x), g(x))) \quad \blacksquare$$

- 1 Прimitивно рекурсивные функции
- 2 Прimitивная рекурсия и машины Тьюринга
- 3 Частично рекурсивные функции**
- 4 Общерекурсивные функции

Частично рекурсивные функции

- Частично рекурсивные функции (partial recursive functions) определяют индуктивно.
- Базисные функции:
 - константа 0;
 - функция следования: $s(x) = x + 1$;
 - семейство функций проекции: $\pi_k^i(x_1, \dots, x_k) = x_i$.
- Операции:
 - подстановка;
 - примитивная рекурсия;
 - минимизация: если $f(x_1, \dots, x_k, y)$ — частично рекурсивная функция, то функция

$$g(x_1, \dots, x_k) = \mu y. f(x_1, \dots, x_k, y) = 0$$

тоже является частично рекурсивной.

- Если частично рекурсивная функция всюду определена, ее называют *общерекурсивной*.

Частично рекурсивные функции: примеры

- Частично рекурсивные функции могут быть не всюду определены.
- **Пример.** Рассмотрим $f(x, y) = s(x) + y$. Где определена

$$g(x) = \mu y. f(x, y) = 0$$

Частично рекурсивные функции: примеры

- Частично рекурсивные функции могут быть не всюду определены.
- **Пример.** Рассмотрим $f(x, y) = s(x) + y$. Где определена

$$g(x) = \mu y. f(x, y) = 0$$

- **Пример.** Рассмотрим версию вычитания $x - y$, не определенную при $y > x$. **Покажите, что она частично рекурсивна.**

Частично рекурсивные функции: примеры

- Частично рекурсивные функции могут быть не всюду определены.
- **Пример.** Рассмотрим $f(x, y) = s(x) + y$. Где определена

$$g(x) = \mu y. f(x, y) = 0$$

- **Пример.** Рассмотрим версию вычитания $x - y$, не определенную при $y > x$. Покажите, что она частично рекурсивна.

$$x - y = \mu z. |x - (y + z)| = 0$$

(модуль разности примитивно рекурсивен.)

Частично рекурсивные функции: примеры

- Частично рекурсивные функции могут быть не всюду определены.
- **Пример.** Рассмотрим $f(x, y) = s(x) + y$. Где определена

$$g(x) = \mu y. f(x, y) = 0$$

- **Пример.** Рассмотрим версию вычитания $x - y$, не определенную при $y > x$. Покажите, что она частично рекурсивна.

$$x - y = \mu z. |x - (y + z)| = 0$$

(модуль разности примитивно рекурсивен.)

- Если частично рекурсивная функция определена всюду, ее называют *общерекурсивной* (total recursive functions).

- **Теорема.** Если f — частично рекурсивная функция, то она вычислима на машине Тьюринга.
- **Доказательство (набросок).** Подстановка соответствует последовательному вычислению, оператор примитивной рекурсии — циклу `for`, оператор минимизации — циклу `while`.
Все эти операции несложно реализовать на машине Тьюринга. ■

Частичная рекурсивность вычислимых функций

- **Теорема.** Если f вычислима на машине Тьюринга, то она частично рекурсивна.
- **Доказательство.** Пусть M — машина Тьюринга, вычисляющая f . Рассмотрим предикат $T(x, y, t) = \langle M \text{ на } x \text{ выдает } y \text{ не более чем за } t \text{ шагов} \rangle$
Этот предикат примитивно рекурсивен. Сделаем из y и t пару (какой-нибудь нумерацией) и рассмотрим

$$T'(x, z) = T(x, p_1(z), p_2(z))$$

Тогда

$$f(x) = p_2(\mu z. T'(x, z)) \quad \blacksquare$$

- **Теорема (Клини).** Всякая частично рекурсивная функция представима в виде

$$f(x) = g(\mu z. h(x, z) = 0)$$

где g и h — некоторые примитивно рекурсивные функции.

- **Доказательство.** Берем машину Тьюринга, вычисляющую f , и пользуемся предыдущей теоремой. ■
- **Следствие.** Всякое перечислимое множество есть проекция примитивно рекурсивного.
- **Доказательство.** Пересислимое множество есть область определения вычислимой функции, берем ее нормальную форму и обнаруживаем, что область определения — проекция $\{\langle x, z \rangle \mid h(x, z) = 0\}$. ■

- 1 Прimitивно рекурсивные функции
- 2 Прimitивная рекурсия и машины Тьюринга
- 3 Частично рекурсивные функции
- 4 Общерекурсивные функции

Общерекурсивные функции

- Напомним, что *общерекурсивной* называют всюду определенную частично рекурсивную функцию.
- Бывают ли функции общерекурсивные, но не примитивно рекурсивные?

Общерекурсивные функции

- Напомним, что *общерекурсивной* называют всюду определенную частично рекурсивную функцию.
- Бывают ли функции общерекурсивные, но не примитивно рекурсивные? Да.
- Перенумеруем все унарные примитивно рекурсивные функции (это можно сделать, поскольку описание примитивно рекурсивной функции можно задать словом в некотором алфавите).
- Рассмотрим функцию $U(n, x)$, которая паре (n, x) ставит в соответствие функцию с номером n , вычисленную на аргументе x . Это будет универсальная функция для класса примитивно рекурсивных.
- Применим теперь диагонализацию, рассмотрев

$$d(n) = U(n, n) + 1$$

Получим всюду определенную функцию, отличную от любой примитивно рекурсивной.

- Рассмотрим семейство функций

$$\begin{aligned}\alpha_0(x) &= x + 1 \\ \alpha_{i+1}(x) &= \alpha_i^{[x+2]}(x)\end{aligned}$$

где $f^{[n]}(x)$ — это n -кратное применение f , то есть $f(f(\dots f(x)\dots))$.

- Очевидные свойства функции $\alpha_i(x)$:
 - $\forall i, x. \alpha_i(x) > x$;
 - $x_2 > x_1 \rightarrow \alpha_i(x_2) > \alpha_i(x_1)$;
 - $i > j \rightarrow \alpha_i(x) > \alpha_j(x)$;
 - $\alpha_{i+1}(x) \geq \alpha_i(\alpha_i(x))$.

- **Теорема.** Любую примитивно рекурсивную функцию $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ можно оценить сверху функцией $\alpha_k(x)$ с фиксированным k :

$$\forall f. \exists k. \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n. f(\vec{x}) \leq \alpha_k(\max \vec{x}).$$

- **Доказательство.** (Индукция по построению примитивно рекурсивной функции).

Базисные

- $0 \leq \alpha_0(x)$;
- $s(x) = \alpha_0(x)$;
- $\pi_n^i(\vec{x}) = x_i \leq \max \vec{x} \leq \alpha_0(\max \vec{x})$.

Оценка примитивно рекурсивных функций (2)

Подстановка.

$$h(\vec{x}') = f(g_1(\vec{x}'), \dots, g_m(\vec{x}'))$$

причем по IH имеется k , такое что $f(\vec{y}') \leq \alpha_k(\max \vec{y}')$ и для любого $j \leq m$ верно $g_j(\vec{x}') \leq \alpha_k(\max \vec{x}')$. Тогда

$$h(\vec{x}') \leq \alpha_k(\max(g_1(\vec{x}'), \dots, g_m(\vec{x}'))) \leq \alpha_k(\alpha_k(\vec{x}')) \leq \alpha_{k+1}(\vec{x}')$$

Оценка примитивно рекурсивных функций (2)

Примитивная рекурсия.

$$\begin{aligned}h(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}) \\h(\vec{x}, s(y)) &= g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))\end{aligned}$$

причем по IH имеется k , такое что $f(\vec{x}) \leq \alpha_k(\max \vec{x})$ и $g(\vec{z}) \leq \alpha_k(\max \vec{z})$. Тогда

$$\begin{aligned}h(\vec{x}, 0) &\leq \alpha_k(\max \vec{x}) \\h(\vec{x}, 1) &= g(\vec{x}, 0, h(\vec{x}, 0)) \leq \alpha_k(\max(\vec{x}, 0, \alpha_k(\max \vec{x}))) \leq \\&\leq \alpha_k(\alpha_k(\max \vec{x})) \\h(\vec{x}, 2) &\leq \alpha_k(\alpha_k(\alpha_k(\max \vec{x}))) \\&\dots \\h(\vec{x}, i) &\leq \alpha_k^{[i+1]}(\max \vec{x}) \leq \alpha_{k+1}(\max(\vec{x}, i)) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

- **Следствие 1.** Прimitивно рекурсивная функция, содержащая k операторов примитивной рекурсии и подстановки растет не быстрее α_{k+1} .
- **Следствие 2.** Функция $A(n) = \alpha_n(n)$ растет быстрее любой примитивно рекурсивной функции.
- $A(n)$ — конструктивный пример общерекурсивной функции, которая не является примитивно рекурсивной.