14 декабря 2017

1. Докажите, что для любых формул A, B, C формула

$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$$

выводима в исчислений высказываний.

2. Докажите, что если $\Gamma_1 \vdash A$ и $\Gamma_2, A \vdash B$, то $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B$.

3. Докажите, что формула $(A \to (B \to C)) \to ((A \land B) \to C)$, так же как и обратная к ней формула(в которой посылка и заключение переставлены), являются теоремами исчисления высказываний. Докажите аналогичное утверждение про формулы $(A \land B) \to (B \land A)$ и $((A \land B) \land C) \to (A \land (B \land C))$.

4. Докажите, что следующие формулы, а также обратные к ним (меняем местами посылку изаключение) являются теоремами исчисления высказываний:

$$((A \lor B) \to C) \to ((A \to C) \land (B \to C)),$$

$$((A \land C) \lor (B \land C)) \to ((A \lor B) \land C),$$

$$((A \lor C) \land (B \lor C)) \to ((A \land B) \lor C).$$

5. Выведите формулы $A \to \neg\neg A$ и $\neg\neg\neg A \to \neg A$.

6. Докажите, что наличии аксиомы исключенного третьего (11) аксиома (10) является лишней – её можно вывести из остальных аксиом.

7. Добавим к исчислению высказываний, помимо правила modus ponens, еще одно правило, называемое правилом подстановки. Оно разрешает заменить в выведенной формуле все переменные на произвольные формулы (естественно, вхождения одной переменной должны заменяться на одну и ту же формулу). Покажите, что после добавления такого правила класс выводимых формул не изменится, но теорема о дедукции перестанет быть верной.

8. Докажите, что формула $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ является теоремой исчисления высказываний.

9. Исключим из числа аксиом исчисления высказываний закон исключенного третьего, заменив его на закон снятия двойного отрицания. Покажите, что от этого класс выводимых формул не изменится.