# 1 Домашнее задание (обязательное)

**Задание 1.1.** На заводе по производству лампочек наладчик настраивает станок на глаз. В результате $\lambda$ — характеристика станка, влияющая на время безотказной работы лампочки, оказывается распределена случайно и имеет Гамма-распределение (плотность $f_\lambda(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\theta}$, $\Gamma$ — гамма-функция Эйлера) с параметрами $k = 9, \theta = 1$. Считаем, что при фиксированной $\lambda$ время работы лампы в минутах — случайная величина с экспоненциальным распределением с параметром $\lambda$.

Первую выпущенную лампочку проверяют на ОТК. Она сгорает ровно через минуту. Найти распределение, моду и матожидание величины $\lambda$. *Выводить матожидание и моду для Гамма-распределения не надо, можно посмотреть в таблице*

**Задание 1.2.** Бросаются два кубика. Чему равно математическое ожидание суммы выпавших очков? Произведения выпавших очков? Чему равна дисперсия суммы выпавших очков?

**Задание 1.3.** Найти корреляцию между числом выпадения единиц и шестерок при $n$ бросаниях кости.

**Задание 1.4.** Привести примеры дискретного распределения, не имеющего дисперсии, но имеющего матожидание и распределения, не имеющего даже матожидания.

**Задание 1.5.** Найти матожидание и дисперсию для негативно-биномиального распределения $NB(r, p)$, т.е. распределение числа успехов до $r$-й неудачи в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p$.

**Задание 1.6.** Найти дисперсию для распределения Пуассона с параметром $\lambda$ и для нормального распределения с параметрами $\mu, \sigma^2$.

**Задание 1.7.** Привести примеры непрерывного распределения, не имеющего дисперсии, но имеющего матожидание и распределения, не имеющего даже матожидания.

**Задание 1.8.** Пусть случайная величина $\xi$ имеет симметричное распределение (т.е. $\mathcal{L}\xi \equiv \mathcal{L} - \xi$). Найти $\operatorname{cor}(\xi, |\xi|)$.

**Задание 1.9.** Пусть $\xi, \eta, \zeta$ — независимые случайные величины с ненулевой дисперсией. Могут ли быть независимы $\xi + \eta$ и $\xi + \zeta$?

**Задание 1.10.** Какое наименьшее и набольшее значение может принимать дисперсия суммы двух случайных величин с дисперсиями $s_1, s_2$?

**Задание 1.11.** Картонный круг радиуса $r$ бросают случайно на клетчатый лист бумаги (размер клетки $1 \times 1$). Найти математическое ожидание числа узлов клеток, накрытых кругом.

**Задание 1.12.** Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор. Пусть все компоненты имеют ненулевую дисперсию. *Матрицей корреляций* для него будем называть матрицу $\mathbf{C} \in \mathsf{R}^{d \times d}$: $((\mathbf{C})_{i,j} = \rho(\xi_i, \xi_j))$. Покажите, что если матрица корреляций вырождена (т.е. $\operatorname{rank} \mathbf{C} < d$), то компоненты линейно зависимы, т.е. существует способ выразить одну случайную величину как линейную комбинацию остальных (почти наверное). *Обращу внимание. Линейная зависимость и линейная независимость для случайных величин не исчерпывают всех возможных вариантов. Линейная зависимость в случае двух величин означает корреляцию* 1 *или* $-1$. *Линейная независимость (некоррелированность) — корреляцию* 0. *Другие корреляции означают, что величины зависимы, но не строго линейно*

**Задание 1.13.** На разлинованную с шагом 1 плоскость бросают монету радиуса $r$. Описать распределение числе пересеченных монетой линий. Чему равно его матожидание и дисперсия? *Подумайте, как ответ согласуется с задачей про бросание спицы*

**Задание 1.14.** В лотерее имеется $m_1$ выигрышных билетов на сумму $s_1$, ..., $m_k$ билетов на сумму $s_k$. Какую цену билета надо установить, чтобы матожидание выигрыша равнялось половине его стоимости?

# 2 Задачи, разобранные в классе

**Задание 2.1.** Установить следующие факты:

1. $\mathsf{E}(c\xi) = c\mathsf{E}\xi$
2. $\xi \geq 0 \Rightarrow \mathsf{E}\xi \geq 0$
3. $\mathsf{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{E}\xi_1 + \mathsf{E}\xi_2$
4. $\mathsf{E}(\xi_1\xi_2) = \mathsf{E}\xi_1 \cdot \mathsf{E}\xi_2$, если $\xi_1, \xi_2$ независимы
5. $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi$
6. $\mathsf{D}\xi = 0 \Rightarrow \xi \equiv c$
7. $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi^2) - (\mathsf{E}\xi)^2$
8. $\mathsf{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2$, если $\xi_1, \xi_2$ независимы

*Можно ли ослабить условия независимости в утверждениях?*

**Задание 2.2.** Привести пример зависимых случайных величин, имеющих, тем не менее, нулевую корреляцию.

**Задание 2.3.** Найти матожидание и дисперсию следующих распределений:

1. Бернулли $B(p)(p, pq)$
2. Биномиальное $Bin(n, p)(np, npq)$
3. Геометрическое $G(p)(1/p, q/p^2)$
4. Пуассона $Pois(\lambda)(\lambda, *)$
5. Экспоненциальное $Exp(\lambda)(1/\lambda, 1/\lambda^2)$
6. Нормальное $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)(\mu, *)$
7. Равномерное $U[a, b]((a + b)/2, (a - b)^2/12)$

**Задание 2.4.** По монете ударяют молотком, в результате орел начинает выпадать с вероятностью $p \sim U[0, 1]$. Монету подбрасывают пять раз, орел выпал трижды. Какое значение $p$ наиболее вероятно? Какой вид имеет распределение $p$ и чему равны его матожидание и мода (наиболее вероятное значение)?

**Задание 2.5.** По монете ударяют молотком, в результате орел начинает выпадать с вероятностью $p \sim U[0,\,1]$. Монету подбрасывают $n$ раз, орел выпал $k$ раз. Какое значение $p$ наиболее вероятно? Какой вид имеет распределение $p$ и чему равны его матожидание и мода?

**Задание 2.6.** На заводе по заточке булавок был нарушен техпроцесс, в результате была выпущена партия булавок с потенциально высоким процентом брака. Известно, что доля бракованных булавок $p$ имеет распределение с плотностью $f_p(x) = 3(1-x)^2$. На складе хранится 1000 булавок из этой партии и их решают проверить, для чего из них случайно проверяют 100 и все оказываются заточенными неправильно. Какой процент брака наиболее вероятен? *Да, 1000 в этой задаче — для отвода глаз*

**Задание 2.7.** Пусть вероятность купить в магазине просроченную кильку составляет 2%. Сколько в среднем банок кильки надо купить, чтобы отравиться? Считаем, разумеется, что события результата разных покупок независимы.

**Задание 2.8.** Показать, что $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta}$.

**Задание 2.9.** Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор с матрицей ковариаций $\Sigma$. Найти дисперсию $\langle \bar{c}, \bar{\xi} \rangle$ для некоторого вектора $\bar{c} \in \mathsf{R}^d$.

**Задание 2.10.** Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор с матрицей ковариаций $\Sigma$. Найти матрицу ковариаций вектора $\mathbf{A}\bar{\xi}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathsf{R}^{k\times d}$.

**Задание 2.11.** Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор. Пусть все компоненты имеют ненулевую дисперсию. *Матрицей ковариаций* для него будем называть матрицу $\mathbf{\Sigma} \in \mathsf{R}^d$: $(\mathbf{\Sigma}_{i,j} = \rho(\xi_i, \xi_j))$. Покажите, что если матрица ковариаций вырождена (т.е. $\operatorname{rank}\mathbf{\Sigma} < d$), то компоненты линейно зависимы, т.е. существует способ выразить одну случайную величину как линейную комбинацию остальных (почти наверное). *Обращу внимание. Линейная зависимость и линейная независимость для случайных величин не исчерпывают всех возможных вариантов. Линейная зависимость в случае двух величин означает корреляцию 1 или −1. Линейная независимость (некоррелированность) — корреляцию 0. Другие корреляции означают, что величины зависимы, но не строго линейно*

**Задание 2.12.** Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор с матрицей ковариаций $\mathbf{\Sigma}$. Пусть $\mathbf{\Sigma}$ невырождена. Найти такую невырожденную матрицу $\mathbf{O} \in \mathsf{R}^{d\times d}$, что компоненты вектора $\mathbf{O}\bar{\xi}$ линейно независимы.

**Задание 2.13.** С.к.о. для каждой из $n$ независимых случайных величин равно $\sigma$. Найти с.к.о. для суммы и среднего арифметического этих случайных величин. *Почему существенна независимость с.в? Достаточно ли попарной независимости в этом случае или задача станет неопределенной? Можно ли как-то ослабить условие независимости?*

**Задание 2.14.** Показать, что для любых случайных величин $\xi, \eta$: $|\operatorname{cor}(\xi,\eta)| \le 1$.

**Задание 2.15.** Произведено четыре выстрела по мишени с вероятностями попадания $0.6, 0.4, 0.5$ и $0.7$ соответственно. Найти матожидание и дисперсию общего количества попаданий.

**Задание 2.16.** Спицу длины $l$ бросают случайно на случайно повернутую разлинованную с шагом 1 плоскость. Найти математическое ожидание числа пересечений спицой линий.

**Задание 2.17.** Аналогично предыдущей задаче, но бросают согнутую в виде ломаной спицу длины $l$. Изменится ли ответ, если в местах сгибов спица будет свободно (случайно) сгибаться-разгибаться?

# 3 Дополнительные задачи

**Задание 3.1.** Пусть $(\xi, \eta)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор, распределение которого сосредоточено на некоторой прямой. Найти корреляцию $\mathrm{cor}(\xi, \eta)$.

**Задание 3.2.** Стрелок бьет по мишени радиуса 1. Найти дисперсию и матожидание расстояния до центра мишени.

**Задание 3.3.** Стрелок бьет по мишени радиуса 1. Известно, что расстояние до центра мишени лежит в интервале $[a,\, b]$. Найти распределение, диспресию и матожидание расстояния до центра мишени.

**Задание 3.4.** На заводе по производству лампочек наладчик настраивает станок на глаз. В результате $\lambda$ — характеристика станка, влияющая на время безотказной работы лампочки, оказывается распределена случайно и имеет Гамма-распределение (плотность $f_\lambda(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\theta}$, $\Gamma$ — гамма-функция Эйлера) с некоторыми параметрами $k, \theta$. Считаем, что при фиксированной $\lambda$ время работы лампы в минутах — случайная величина с экспоненциальным распределением с параметром $\lambda$.

Первые выпущенные $n$ лампочек проверяют на ОТК. Они сгорают через $t_1, t_2, \ldots, t_n$ минут соответственно. Найти распределение, моду и матожидание величины $\lambda$. *Выводить матожидание и моду для Гамма-распределения не надо, можно посмотреть в таблице*

**Задание 3.5.** Фигуру некоторой формы площади $S$, вырезанную из картона, бросают случайно на клетчатый лист бумаги (размер клетки $1 \times 1$). Найти математическое ожидание числа узлов клеток, накрытых фигурой.

**Задание 3.6.** Какое наименьшее и наибольшее значение может принимать дисперсия случайной величины, сосредоточенной на интервале $[a,\, b]$? *Рассуждение было начато на паре, нужно провести его до конца*

**Задание 3.7.** Вам предложили сыграть в игру: берется колода на 36 карт, перетасовывается. Затем карты по очереди открываются, и вам нужно угадывать цвет открываемой карты. Если угадали, то вам платят 100 рублей. Если не угадали, то вы платите в первый раз одну копейку, во второй раз две, затем четыре и так далее *(в геометрической прогрессии)*. Согласитесь ли вы играть? При какой плате за правильно названную карту игра станет справедливой (т.е. матожидание выигрыша равно нулю)? *Для решения этой задачи может оказаться полезно что-то запрограммировать*