12 октября 2017

1. Подсчитайте количество ребер в полном двудольном графе $K_{m,n}$ на $|V(K_{m,n})| = n + m$ вершинах. Что можно сказать о параметрах m и n в случае, если $K_{m,n}$ является k-регулярным?

2. А что можно сказать о размере долей двудольного k-регулярного графа (не обязательно полного)?

3. Пусть G — простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа G больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна 4?

4. Доказать, что связный граф, степени всех вершин которого четны, остается связным при удалении любого ребра.

5. Пусть G есть регулярный простой связный граф, имеющий 22 ребра. Сколько вершин может содержать данный граф?

6. Доказать, что любой маршрут, соединяющий вершины x и y, содержит простой путь, соединяющий те же самые вершины.

7. Доказать, что простой граф G, минимальная степень $\delta(G)$ которого больше или равна $n/2$, является связным. Показать, что эта оценка точная, предъявив несвязный граф с $\delta(G) = n/2 - 1$.

8. Доказать, что дополнение несвязного графа является связным.

9. Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Докажите, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ треугольникам в графе G.

10. Последовательностью степеней вершин графа, или степенной последовательностью (degree sequence), называется список всех степеней вершин графа G, записанный в порядке невозрастания:
$$\deg(x_1) \geq \deg(x_2) \geq \ldots \geq \deg(x_n).$$
Докажите, что невозрастающая последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ целых неотрицательных чисел является степенной последовательностью некоторого графа G тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число.

11. Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел
$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n), \quad d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0,$$
называется *графовой*, если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа G. Покажите, что последовательности чисел $(1, 1, 0)$ и $(2, 2, 1, 1)$ являются графовыми, предъявив для каждой из них соответствующие им простые графы.

12. Рассмотрим последовательность $\mathbf{d_1} := (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$. Удалим в ней число 3, стоящее на первой позиции, а от следущих трех чисел отнимем по единице. В результате получим последовательность $\mathbf{d_2} := (2, 2, 2, 3, 2, 2, 1)$, которая после переупорядочивания по невозрастанию примет вид $(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$. В общем случае соответствующая пара последовательностей будет иметь следующий вид:
$$\begin{aligned} \mathbf{d_1} &:= (s, \quad d_1, \quad d_2, \quad \ldots, d_s, \qquad d_{s+1}, \ldots, d_n), \\ \mathbf{d_2} &:= \quad (d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_s - 1, d_{s+1}, \ldots, d_n). \end{aligned}$$
Докажите, что последовательность $\mathbf{d_1}$ является графовой тогда и только тогда, когда таковой является и последовательность $\mathbf{d_2}$. Сформулируйте на основании данного утверждения алгоритм проверки на графовость для невозрастающей числовой последовательности.

13. Докажите, что граф Q_k (т. е. k-куб) действительно является k-регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?

14. Пусть G есть простой граф, диаметр которого $\mathrm{diam}(G) \geq 3$. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ имеет диаметр $\mathrm{diam}(\bar{G}) \leq 3$

15. Доказать, что простой граф G, построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.