Посчитать и подумать

На прошедшей паре в основном обсуждалась контрольная. Однако пару новых фактов стоит отметить.

Определение 1. *Группа G называется простой, если у неё ровно две нормальные подгруппы — она сама и $\{e\}$.*

Замечание. Вы уже знаете, что группа C_p простая, если число p простое.

Факт. Группа A_5 простая.

На самом деле группа A_n простая, если $n \geq 5$, но это оставим в качестве задачи. Гигантским достижением математики двадцатого века стала классификация всех конечных простых групп. К сожалению для того, чтобы узнать точную формулировку теоремы понадобится отдельный курс.

Напомню так же основной метод подсчёта элементов в подгруппе S_n. Первый шаг обычно состоял в том, чтобы перечислить все возможные орбиты, на которые действие группа разбивает множество $\{1, \ldots, n\}$. Потом удавалось показать (но не обязательно удастся снова), что исходная группа порождена перестановками, которые действуют на какой-то одной орбите, а на других не действуют. Это давало возможность разложить группу G в произведение подгрупп, каждая из которых переставляет элементы какой-то одной орбиты (то есть является подгруппой S_k для $k < n$).

Далее можно было разбираться с каждым сомножителем отдельно. Здесь играла роль формула про орбиту и стабилизатор. Довольно легко было посчитать орбиту какого-нибудь элемента, после чего оценка на количество элементов в стабилизаторе и замечания про чётность перестановок обычно завершали дело.

Задачи про порядки обычно решаются нахождением какого-то свойства, которое очевидно сохраняется при изоморфизме, и очевидно есть у одного из кандидатов и отсутствует у других. Довольно полезно было смотреть на мощности множества элементов зажатых между какими-то a и b, на множество несравнимых с данным a элементов, на максимально возможные длины линейно упорядоченных подмножеств и их структуру.

1. Задачи

Задание 1. Посчитайте количество элементов в подгруппе порождённой g и h, а так же попробуйте понять, чему изоморфна эта подгруппа, если
а) $g = (1\,2)(3\,4)(5\,6\,7),\ h = (1\,4)(3\,2)(5\,6\,7\,8)$ в S_8.
б) $g = (1\,2\,3)(5\,6),\ h = (3\,4)(5,\,6\,7\,8,\,9)$ в S_9.
Попробуйте сделать это считая устно и используя общие факты про перестановки.

Для краткости будем писать $\times_{lex}$, если на сомножителях вводится лексикографический порядок и $\times_{nat}$, в случае естественного порядка.

Задание 2. Какие порядки не изоморфны, а какие изоморфны:
а) $(\mathbb{Z} \times_{lex} \mathbb{Q}) \times_{nat} \mathbb{Q}$
б) $(\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{Z}) \times_{nat} \mathbb{Q}$
в) $(\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{Q}) \times_{nat} \mathbb{Z}$

Задание 3. Изоморфны ли порядки:
а) $\mathbb{R}$
б) $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{R}$
в) $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{R}$
г) $\mathbb{R} \times_{lex} \mathbb{Q}$
Не забудьте про свойство полноты вещественных чисел.

Под конец разминка про нормальные подгруппы

Задание 4. Пусть $f\colon G \to G'$ гомоморфизм групп и $H \trianglelefteq G'$. Тогда прообраз $f^{-1}(H)$ есть нормальная подгруппа в G.

2. Необязательные задачи

Задание 5. Покажите, что $\mathbb{Q} \times_{lex} \mathbb{Q}$ изоморфно $\mathbb{Q}$ как частично упорядоченное множество.

Задание 6. (3 балла) Покажите, что группа A_n простая при $n \geq 5$. На паре было обсуждено, что все циклы длины три сопряжены внутри A_n. Таким образом, стратегия состоит в том, чтобы показать, что в любой нормальной подгруппе в A_n есть цикл длины 3.

Следующая задача завершает джентльменский набор знаний про группу перестановок. Напоминаю, что любой элемент из S_n при $n \geq 3$ задаёт нетривиальный внутренний автоморфизм. Группа $\mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$ называется группой внешних автоморфизмов группы G и обозначается как $\mathrm{Out}(G)$

Задание 7. (5 баллов) Покажите, что группа автоморфизмов S_n изоморфна S_n при $n \geq 3$, $n \neq 6$. При $n = 6$ группа внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(S_6)$ нетривиальна и состоит из 2-ух элементов. Предлагается следовать следующим пунктам:
а) Покажите, что автоморфизм переводит цикл длины n в цикл длины n. (Посчитайте количество элементов в классе сопряжённости для других вариантов, например).
б) Покажите, что чётные перестановки переходят в чётные.
в) Покажите, что если транспозиция перешла в транспозицию, то автоморфизм внутренний.(все транспозиции сопряжены, S_n порождается транспозициями)
г) Покажите, что при $n \neq 6$ транспозиция обязательно переходит в транспозицию. (снова посмотреть на количество сопряжённых)
д) Покажите, что при $n = 6$ транспозиция может перейти в произведение трёх независимых транспозиций. Сделайте вывод, этим однозначно задаётся единственный нетривиальный внешний автоморфизм.