12.10.2017

1. Доказать, что любое дерево является двудольным графом.

2. В предыдущем упражнении мы доказали, что дерево является двудольным графом. Доказать, что хотя бы один лист произвольного дерева содержится в той части разбиения вершин на доли, которое содержит наибольшее количество вершин.

3. Пусть F есть лес, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Подсчитать количество m ребер в графе F. Доказать, что любой простой граф, имеющий k компонент связности и найденное в первой части упражнения количество m ребер, обязательно является лесом.

4. Пусть граф G имеет остовные деревья диаметрами 2 и l. Доказать, что в таком графе для любого $k \in (2, l)$ существует остовное дерево диаметром k.

5. Построить все неизоморфные друг другу деревья на $n = 6$ вершинах.

6. Доказать, что любое дерево имеет либо единственный центр, либо два центра, соединенных между собой ребром.

7. Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, $n \geqslant 2$, положительных натуральных чисел. Доказать, что равенство

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2, \qquad d_i > 0 \tag{1}$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта последовательность была графовой для некоторого дерева T, построенного на n вершинах.

8. Пусть T есть дерево, в котором степень любой вершины, смежной с листом дерева, имеет степень, большую или равную трем. Доказать, что в T обязательно найдется пара листьев, имеющих общего соседа.

9. Пусть G есть простой граф с $\delta(G) \geqslant k$, а T есть произвольное дерево с k ребрами. Доказать, что в G имеется подграф, изоморфный T.

10. Доказать следующее необходимое условие существования k попарно реберно непересекающихся остовных деревьев в графе G: для любого разбиения множества $V(G)$ вершин графа G на r блоков, $r \in [2, |V(G)|]$, найдется по меньшей мере $k(r-1)$ ребер графа G, концы которых лежат в различных блоках разбиения.