Список вопросов к экзамену по математическому анализу
АУ, второй семестр, весна 2017 года

Глава V. Интегральное исчисление

1. ! Линейность интеграла и формула интегрирования по частям.

2. ! Замена переменной в определенном интеграле. Примеры.

3. Вычисление интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

4. Формула Валлиса.

5. ! Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

6. Иррациональность числа π.

7. Равномерная непрерывность функций. Равномерная непрерывность функций с ограниченной производной. Теорема Кантора.

8. Модуль непрерывности. Свойства.

9. ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

10. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману. Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$.

11. Формула трапеций.

12. Формула Эйлера–Маклорена (для второй производной).

13. Оценка сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ при различных p. Постоянная Эйлера.

14. Формула Стирлинга.

15. ! Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры.

16. Свойства несобственных интегралов.

17. ! Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

18. Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

19. Признак Абеля. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$.

Глава VI. Метрические и нормированные пространства

20. ! Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

21. ! Открытые и замкнутые множества: определение и свойства.

22. ! Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

23. Замыкание множества, связь со внутренностью. Свойства замыкания.

24. ! Предельные точки. Связь с замыканием множества.

25. Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

26. ! Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

27. ! Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

28. Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

29. ! Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

30. Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие о вложенных компактах.

31. Теорема о вложенных параллелепипедах. Теорема Гейне–Бореля.

32. ! Секвенциальная компактность. Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$.

33. ! Следствия секвенциальной компактности. Теорема Больцано–Вейерштрасса.

34. ! Фундаментальные последовательности. Полнота $\mathbb{R}^m$. Полнота компактных метрических пространств.

35. Определения предела по Коши и по Гейне. Критерий Коши.

36. ! Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

37. ! Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.

38. Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора для отображений метрических пространств.

39. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^m$.

40. ! Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

41. ! Норма линейного оператора. Простейшие свойства.

42. Эквивалентные определения нормы оператора.

43. Свойства, эквивалентные ограниченности линейного оператора. Ограниченность линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Оценка нормы через сумму квадратов.

44. ! Путь, носитель пути, простой путь, гладкий путь. Эквивалентные пути. Определение кривой.

45. ! Длина пути и длина кривой. Определение и простейшие свойства. Аддитивность длины кривой.

46. Длина кривой, заданной параметрически (с леммой).

47. Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах. Оценка длины кривой.

48. Натуральная параметризация кривой.

49. Линейная связность. Теорема Больцано–Коши.

Глава VII. Числовые ряды

50. Критерий Коши. Группировка членов ряда. Свойства.

51. ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.

52. ! Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

53. ! Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

54. Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак. Сходимость и расходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

55. ! Абсолютная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Условно сходящиеся ряды.

56. Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

57. ! Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда. Примеры.

58. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда.

59. Теорема Римана.

60. Теорема Коши. Произведение рядов. Теоремы Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

61. Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).

62. Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.

63. Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$.

64. ! Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

65. Произведение равномерно ограниченной и равномерно сходящейся последовательностей. Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

66. Пространство $\ell^\infty(E)$ и его полнота.

67. ! Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса–Зайделя. Пространство $C(K)$ и его полнота.

68. ! Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

69. ! Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствия. Примеры.

70. Признаки Дирихле и Лейбница. Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не равномерно абсолютно.

71. Признак Абеля.

72. Теоремы о перестановке пределов и перестановке предела и суммы.

73. Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

74. Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

75. ! Степенные ряды. Теорема о сходимости ряда при меньших аргументах. Радиус и круг сходимости.

76. Формула Коши–Адамара (с леммой). Существование радиуса сходимости. Примеры.

77. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда.

78. Теорема Абеля. Почленное интегрирование суммы степенного ряда (с леммой).

79. Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

80. Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

81. ! Определение e^z, $\sin z$ и $\cos z$. Свойства.

82. Ряд Тейлора для $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$.

83. Ряд Тейлора для $(1+x)^p$ и $\arcsin x$.

Глава VIII. Функции нескольких переменных

84. ! Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент.

85. ! Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений.

86. ! Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента.

87. ! Частные производные. Элементы матрицы Якоби. Координатная запись формул для производных.

88. ! Линейность диференциала. Дифференциал композиции.

89. ! Две теоремы о дифференцируемость произведения функций.

90. Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

91. ! Связь частных производных и дифференцируемости.

92. Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство.

93. ! Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в $\mathbb{R}^2$.

94. Теорема о равенстве частных производных для непрерывно дифференцируемых функций. Пример, показывающий необходимость непрерывности производных.

95. Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.

96. ! Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Частные случаи.

97. Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Полиномиальная формула.

Примечания

Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают с доказательством лишь вопросы из второй части (вопросы 35–97). Сдача коллоквиума не освобождает от необходимости знать формулировки из обеих частей курса.

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: формулы замены переменной и интегрирования по частям; равномерная непрерывность; теорема Кантора; определения сумм Римана и их связи с интегралами; определение несобственного интеграла; признак сравнения; определение внутренних и предельных точки, открытых, замкнутых и компактных множеств, секвенциальной компактности, компактности в $\mathbb{R}^m$, фундаментальной последовательности, непрерывности; теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях; определения нормы и скалярного произведения; определения длины пути и формул для вычисления длины; определение нормы линейного оператора; определение сходимости ряда; необходимое условие сходимости ряда; признак сравнения; признаки Даламбера и Коши; определение абсолютной сходимости рядов; признак Лейбница; определение произведения рядов; определение поточечной и равномерной сходимости функциональной последовательности и ряда; условия почленной дифференцируемости и интегрируемости функционального ряда; радиус и круг сходимости степенного ряда; ряды Тейлора для элементарных функций; определение дифференцируемости отображения, градиента, матрицы Якоби, производных по направлению, частных производных; экстремального свойства градиента; связи между дифференцируемостью и существованием частных производных; многомерной формулы Тейлора.