

## Задание 6

23.04.2017

**FL 20** (Только группа Палецких) Докажите, что следующие языки являются контекстно-свободными:

d)  $\{x\#y \mid x, y \in \{0, 1\}^*, x \neq y\}$

**FL 21** Докажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операций:

d)  $SHIFT(L)$ .

**FL 23** (Только группа Палецких) Докажите, что замыкание Клини унарного языка (то есть языка над алфавитом из одного символа) является регулярным языком.

**FL 24** Пусть  $G = (\Sigma, N, R, S)$  — обыкновенная грамматика, в которой  $|R| = p$  и длина правой части каждого правила не превосходит  $m$ . Пусть из  $A \in N$  выводится пустая строка. Докажите, что тогда из  $A$  возможно вывести пустую строку за не более чем  $\frac{m^p-1}{m-1}$  шагов.

**FL 26** Докажите следующую Лемму Огдена:

**Лемма.** Для каждого контекстно-свободного языка  $L \subseteq \Sigma^*$  существует такая константа  $p \geq 1$ , что для любой строки  $w \in L$ , для которой  $|w| \geq p$ , и для любого множества  $P \subseteq \{1, \dots, |w|\}, |P| \geq p$  выделенных позиций в  $w$  существует разложение  $w = xiu^pvyz$ , для которого

- $iw$  содержит хотя бы одну выделенную позицию,
- $iu^pvy$  содержит не более  $p$  выделенных позиций,
- $xu^i y v^i z \in L$  при всех  $i \geq 0$ .

**FL 27** Докажите, что следующие языки не являются контекстно-свободными:

a)  $\{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0, m \neq n\}$

b)  $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

c)  $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a \cdot |w|_b < |w|_c\}$

d)  $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \mid m\}$

**FL 28** Докажите, что класс контекстно-свободных языков не замкнут относительно операции

a) пересечения

b) дополнения

c)  $\frac{1}{2}L = \{u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L\}$

d)  $SHUFFLE(L_1, L_2) = \{a_1 b_1 \dots a_n b_n \mid a_i, b_j \in \Sigma, a_1 \dots a_n \in L_1, b_1 \dots b_n \in L_2\}$

**FL 29** Докажите, что каждая обыкновенная грамматика, генерирующая язык

$L = \{w_1 w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w_1 = w_1^R, w_2 = w_2^R\}$ , неоднозначна.

**Определение.** Будем говорить, что язык  $L$  префиксно замкнут, если для каждого слова  $w \in L$  все его префиксы лежат в  $L$ .

**FL 30** Докажите, что если контекстно-свободный язык бесконечен и префиксно замкнут, то он содержит некоторый бесконечный регулярный язык.

**Определение.** Конъюнктивной грамматикой будем называть четвёрку  $G = (\Sigma, N, R, S)$ , где  $\Sigma$  — алфавит,  $N$  — множество нетерминальных символов,  $R$  — множество правил вывода,  $S$  — выделенный стартовый нетерминальный символ. Правила вывода могут иметь вид  $A \rightarrow \alpha_1 \& \alpha_2 \& \dots \& \alpha_k$ , где  $A \in N$ ,  $\alpha_i \in (\Sigma \cup N)^*$ . Принадлежность строк  $L(A)$  определим следующим образом: если для любого  $i$  выполнено  $w \in L(\alpha_i)$ , то  $w \in L(A)$ .

**FL 31** Докажите, что следующие языки генерируются конъюнктивными грамматиками:

a)  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

b)  $\{w c w \mid w \in \{a, b\}^*\}$