Теория групп и перестановки

Внимание! Первая и вторая задачи перешли в разряд необязательных (ну вам без разницы, какие две задачи я уберу, но факт, что они на любителя). При этом на следующей паре планируется разбор важных задач типа 14, 15 и, возможно, 7 и 8.

Это домашнее задание посвящено понятию группы, подгруппы, гомоморфизма групп, а так же понятию порядка элемента в особенности применительно к перестановкам. Если где-то написано $\mathbb{Z}$, то это подразумевает, что это группа по сложению. Иногда я буду опускать обозначение операции и буду писать что-то типа "Пусть G группа..." и "Рассмотрим произведение xy ...". Будем обозначать соотношение "H подгруппа G" следующим образом $H \leq G$.

Первое задание осталось с пары.

Задание 1. Пусть $G, \cdot$ - полугруппа (то есть там, где априори операция $\cdot$ только ассоциативна) и выполнены два свойства
a) $\exists e \in G, \forall x \in G e \cdot x = x$
b) $\forall x \in G \, \exists x^{-1} \in G x^{-1} \cdot x = e$.
Покажите, что G на самом деле группа.

Замечание. Типичным примером полугруппы является множество отображений из X в себя относительно композиции.

Задание 2. Пусть $(G, \cdot)$ — группа. Определим новую операцию

$$x \circ y = y \cdot x.$$

Покажите, что $(G, \circ)$ является группой и изоморфна $(G, \cdot)$.

Задание 3. (Каждый пункт идёт как отдельная задача) Приведите пример такого множества G с операцией, что выполнены
a) все аксиомы группы, кроме ассоциативности
b) все аксиомы группы, кроме существования обратного
c) нет единицы, но есть ассоциативность и сократимость (т.е. $\forall x\,, y\,, z \in G$, если $xz = yz$ или $zx = zy$, то $x = y$.) d) есть единица, ассоциативность и сократимость, но обратного всё равно нет.

Задание 4. Покажите, что если в конечной полугруппе выполнена сократимость, то это группа.

Задание 5. Является ли группой множество $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ относительно операции $a \cdot b = a + b + ab$?

Определение 1. *Напомню, что группа G называется абелевой, если для любых $x, y \in G$ верно, что $xy = yx$.*

Задание 6. Пусть A некоторое множество. Докажите, что 2^A является абелевой группой относительно операции симметрической разности Δ и, порядок любого элемента равен двум (кроме единицы этой группы).

Задание 7. Пусть G - группа, а g - её элемент. Покажите, что существует единственный гомоморфизм групп $f\colon \mathbb{Z} \to G$, такой что $f(1) = g$

Определение 2. *Пусть G - группа, а X некоторое подмножество G. Тогда подгруппой порождённой X называется наименьшая подгруппа $H \leq G$ содержащая X. Эта подгруппа всегда существует и совпадает с подгруппой, равной пересечению подгрупп содержащих X*

$$H = \bigcap_{L \leq G, X \subset L} L.$$

Будем обозначать эту подгруппу за $\langle X \rangle$. Если множество состоит из нескольких элементов, скажем x, y, z, то мы будем писать просто $\langle x, y, z \rangle$.

Задание 8. Покажите, что подгруппа порождённая элементом $g \in G$ совпадает с множеством элементов $\{g^m | m \in \mathbb{Z}\}$.

Задание 9. Покажите, что подгруппа $\langle \frac{1}{2} \rangle$ в $\mathbb{Q}^*$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Приведите пример подгрупп вида $\langle g \rangle$, не изоморфных $\mathbb{Z}$.

Определение 3. *Порядком группы называется количество элементов в ней.*

Задание 10. Покажите, что существует лишь конечное число групп порядка n. Оцените сверху их количество.

Задание 11. Покажите, что порядок элемента x равен порядку группы, им порождённой $|\langle x \rangle|$.

Задание 12. Пусть задана перестановка [2 5 4 3 1] (Здесь подразумевается, что число 1 переходит в 2, 2 в 5, 3 в 4 и т.д.). Чему равен порядок этого элемента в S_5?

Задание 13. Приведите пример подгруппы порядка 6 в S_4. Порядка 8?

Задание 14. Пусть перестановка $\sigma \in S_n$ есть цикл длины k (то есть переставляет какие-то k элементов по какому-то циклу, а остальные не трогает). Чему равен её порядок?

Задание 15. Пусть перестановка $\sigma \in S_n$ разложилась в произведение непересекающихся циклов, чьи длины известны. Как найти порядок σ?