

# Задания

13 апреля 2018 г.

1. Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную монаде абелевых групп на множествах. Обратите внимание, что вам потребуется определить особым образом *instance Eq* для типа монад.
2. Пусть  $(A, *, 1)$  – моноид. Тогда *полумодуль* над моноидом  $A$  – это моноид  $(M, +, 0)$  вместе с операцией  $\cdot : A \times M \rightarrow M$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор  $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$  является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории  $\mathbf{Set}$ . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

3. Пусть  $(A, +, 0, *, 1)$  – кольцо. Тогда *полумодуль* над кольцом  $A$  – это моноид  $(M, +, 0)$  вместе с операцией  $\cdot : A \times M \rightarrow M$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- $0 \cdot x = 0$
- $(r * s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Забывающий функтор  $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Set}$  является правым сопряженным. Следовательно существует монада полумодулей на категории  $\mathbf{Set}$ . Реализуйте на хаскелле монаду, аналогичную этой монаде.

4. Реализуйте *instance Monad* для типа *Term*:

```
data Term a = Var a | App (Term a) (Term a) | Lam (Term (Maybe a))
```

Реализуйте алгоритм нормализации для *Term*.

5. Пусть  $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  – монада. Докажите, что функтор

$$U^T : T\text{-alg} \rightarrow \mathbf{C}$$
$$U^T(A, h) = A$$

является правым сопряженным к

$$F^T : \mathbf{C} \rightarrow T\text{-alg}$$
$$F^T(A) = (T(A), \mu_A),$$

и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто  $T$ .

6. Докажите, что категория Клейсли  $\mathbf{Kl}_T$  эквивалентна полной подкатегории  $T\text{-alg}$  на свободных  $T$ -алгебрах.
7. Опишите алгебраическую теорию, категория моделей которой эквивалентна категории рефлексивных графов, которые определялись в предыдущем ДЗ.