DL 101. (The Hat Problem) В комнате находятся n человек. На каждом человеке находится шляпа черного или белого цвета. Шляпа выдаются случайным образом независимо друг от друга. Каждый человек может видеть шляпы всех остальных людей, но не может видеть свою. Каждого человека спрашивают, не хочет ли он попробовать угадать цвет своей шляпы. Человек может попробовать или отказаться. Каждый человек делает выбор, не зная ответы остальных людей. Выигрывают или проигрывают люди вместе. Они выигрывают, если все, кто решил отвечать отвечают верно, и хотя бы один человек отвечает. Во всех других случаях люди проигрывают.

а) Назовем граф G ориентированным подграфом n-мерного гиперкуба, если его вершины соответствуют бинарным строкам длины n и если существует ребро $u \to v$, то строки u, v различаются не более, чем в одном бите. Пусть $K(G)$ — количество вершин в графе G со входящей степенью не менее 1 и исходящей 0. Покажите, что вероятность победы в игре равна максимуму по выборам подграфа n-мерного гиперкуба величины $K(G)/2^n$.

б) Используя факт, что исходящая степень вершин не превосходит n, покажите, что $K(G)/2^n \leq \frac{n}{n+1}$ для любого графа G подграфа n-мерного гиперкуба.

в) Покажите, что если $n = 2^l - 1$, то существует граф G, для которого $K(G)/2^n = \frac{n}{n+1}$. (Подсказка: используйте коды Хэмминга).

DL 102. Докажите, что:

а) среди любых 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых, а из любых 10 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых;

б) из 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых;

в) из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

DL 103. Пусть $\mathbb{F}$ — поле остатков по простому модулю p. Выбираются случайно независимо два элемента $a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Покажите, что для любых $x, y \in \mathbb{F}$, если $x \neq y$, то случайные величины $ax + b$ и $ay + b$ являются независимыми.

DL 104. Пусть $C : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$ — это код Хемминга. Проверьте, что он является линейным кодом. Т.е. $C(x+y) = C(x)+C(y)$, сумма векторов покомпонентная по модулю 2.

DL 105. Пусть X — неотрицательная случайная величина, которая не равна тождественно нулю. Докажите, что $\Pr[X > 0] \geq \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$.

DL 106. Два игрока играют в камень-ножницы-бумага, проигравший платит 1 выигравшему, в случае ничьи никто никому не платит. Первый игрок выбирает случайным образом равновероятно "камень, ножницы"или бумагу. Может ли второй игрок действовать так, чтобы математическое ожидание его выигрыша было больше нуля?

DL 107. Дан связный неориентированный граф G без кратных ребер и петель, с числом вершин $n > 2$. Каждое ребро графа независимо покрасили в черный или белый цвет равновероятно. Случайная величина X равняется числу вершин, из которых исходит четное число черных ребер. Вычислите:

а) $E[X]$;

б) $D[X]$.

DL 108. На вступительном экзамене некоторые школьники списали решения некоторых задач у своих товарищей. Докажите, что можно выгнать с позором нескольких участников так, чтобы оказалось, что выгнанные школьники списали у не выгнанных не менее четверти от общего числа списанных решений.

DL 75. Пусть функция CONN принимается на вход ребра графа и возвращает 1 тогда и только тогда, когда данный граф связен.

а) Докажите, что глубина дерева решений функции CONN равна $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число вершин входного графа.

б) Оцените размер дерева решений функции CONN.

DL 91. Пусть $\mathcal{F}$ — это семейство подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$, а p_i — это доля элементов $\mathcal{F}$, которые содержат элемент i. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leq 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} H(p_i)}$.

DL 94. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, $I \subseteq [n]$ — произвольное множество. Докажите, что:

а) для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ события $[X_i \in A_i]$ являются независимыми;

б) для любых функций $f_1, f_2, \ldots f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f(X_i)$ являются независимыми;

в) случайные величины $\{X_i\}_{i \in I}$ являются независимыми;

г) для любых функций $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{[n] \setminus I} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f((X_i)_{i \in I})$ и $g((X_i)_{i \in [n] \setminus I})$ независимы.

DL 98. Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

DL 100. Коды Уолша-Адамара.

а) Каждому $a \in \{0, 1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0, 1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\mathtt{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\mathtt{WH}(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0, 1\}^n$ их коды $\mathtt{WH}(a)$ и $\mathtt{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathtt{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0, 1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0, 1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.