DL 18. Докажите, что у каждой невыполнимой формулы в КНФ, использующей n переменных, есть резолюционное опровержение, состоящие из не более, чем $2^{n+1} - 1$ дизъюнктов.

DL 19. В каждую клетку квадрата $n \times n$ поставим свою пропозициональную переменную, затем для каждой клетки, в которой стоит переменная x запишем дизъюнкт $(\neg x \vee u(x) \vee r(x))$, где $u(x)$ — это переменная, которая находится в верхней соседней клетке для x, а $r(x)$ — это перемененная — правый сосед x (если верхнего соседа нет, то $u(x) = 0$, а если правого нет, то $r(x) = 0$). Пусть a — переменная, которая стоит в левой нижней клетке, допишем еще дизъюнкт (a). Покажите, что конъюнкция выписанных дизъюнктов — невыполнимая формула и для нее существует резолюционное опровержение длины $O(n^2)$.

DL 20. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

DL 21. Формула в КНФ называется Хорновской, если каждый ее дизъюнкт содержит не более одной переменной без отрицания. Придумайте алгоритм, который за полиномиальное от длины входной формулы время проверит, выполнима ли Хорновская формула.

DL 22. $f(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n, z_0, \ldots, z_{n+1}) = [\sum\limits_{i=0}^{n} x_i 2^i + \sum\limits_{i=0}^{n} y_i 2^i = \sum\limits_{i=0}^{n+1} z_i 2^i]$ $(x + y = z$, где v_i это i битый двоичной записи $v)$. Постройте формулы ϕ_n в КНФ, полиномиального размера от n (сумма числа переменных по всем дизъюнктам ограниченна полиномом от n), что верно следующие

$$\exists g_0, \ldots, g_{m_n}\ \phi_n(x_0, \ldots, z_{n+1}, g_0, \ldots, g_{m_n}) \iff f(x_0, \ldots, z_{n+1}).$$

DL 23. По формуле в 2-КНФ построим ориентированный граф. Вершинами графа будут множество переменных и отрицаний переменных. Для каждого дизъюнкта $(l_1 \vee l_2)$ в графе проводится два ребра из $\neg l_1$ в l_2 и из $\neg l_2$ в l_1. Докажите, что формула выполнима тогда и только тогда, когда для каждой переменной x вершины x и $\neg x$ находятся в разных компонентах сильной связности (т.е. либо из x нет пути в $\neg x$, либо из $\neg x$ нет пути в x).

DL 14. (Теорема Поста) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть не монотоная, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0, \ldots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1, \ldots, 1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что:

а) с помощью композиций этих функций можно получить отрицание, константу 1, константу 0;

б) с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;

в) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 15. Пусть формула $\phi \to \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ, которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

DL 16. Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n и их не меньше 2^{n-1}.

DL 17. Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.