Коллоквиум по алгебре, первый курс, второй семестр
30 марта 2015 года

Общие комментарии и принципы проведения коллоквиума

1. Приведенный список является списком тем, которые необходимо знать. Формулировки конкретных вопросов коллоквиума могут отличаться от перечисленных, однако не будут выходить за рамки указанных тем.
2. Тему «Определители» можно изучать по разным источникам. В списке тем указаны ссылки на соответствующий материал в книге З.И.Боревича «Определители и матрицы». Например, номер I.3 означает главу 1, параграф 3. При желании можно пользоваться и другими источниками.
3. Темы из книги «Определители и матрицы», пересекающиеся с материалами уже прошедших лекций, в коллоквиум не включены, но могут быть включены в экзаменационные темы в конце семестра.
4. Коллоквиум проводится в письменном виде по единому варианту для всех. Время, отведенное на подготовку ответа, составляет 4 часа. В работу входят 2 теоретических вопроса и 2 задачи. Каждый вопрос и каждая задача оцениваются в 25 баллов. Максимальная сумма баллов за работу — 100.
5. Критерии оценки:
   - 0–49 баллов — неудовлетворительно,
   - 50–69 баллов — удовлетворительно,
   - 70–84 баллов — хорошо,
   - 85–100 баллов — отлично.
6. Оценка за коллоквиум учитывается при выставлении окончательной оценки на экзамене.

Теория делимости в коммутативных кольцах

1. Отношение делимости, его свойства. Область целостности.
2. Идеалы, их свойства. Пересечение, сумма и произведение идеалов.
3. Идеалы, порожденные семейством. Главные идеалы. Область главных идеалов. Примеры колец, не являющихся кольцами главных идеалов.
4. Обратимые элементы. Ассоциированные элементы.
5. Наибольший общий делитель. Свойства наибольшего общего делителя в кольце главных идеалов. Взаимно простые элементы.
6. Евклидовы кольца. Примеры евклидовых колец. Евклидовость кольца целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$.
7. Алгоритм Евклида и линейное представление наибольшего общего делителя в евклидовых кольцах.
8. Евклидово кольцо является областью главных идеалов.
9. Простые, неприводимые и составные элементы кольца. Неприводимость простых элементов в области целостности.
10. Простота неприводимых элементов в кольцах главных идеалов.
11. Пример кольца с неоднозначным разложением на неприводимые множители.
12. Теорема об однозначном разложении на неприводимые множители в кольце главных идеалов.
13. Разложение на неприводимые множители в $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$.
14. Сравнимость по модулю идеала. Свойства. Классы вычетов.
15. Построение кольца классов вычетов по модулю идеала. Примеры.
16. Кольцо классов вычетов по максимальному идеалу - поле.
17. Конструкция поля комплексных чисел как кольца классов вычетов.
18. Расширения полей. Присоединение корней многочлена. Поле разложения.
19. Построение поля частных области целостности.
20. Поле рациональных функций. Теорема о разложении рациональной функции на простейшие дроби.

Определители и матрицы

1. Понятие определителя n-го порядка [Б, I.2].
2. Свойства определителей: определитель транспонированной матрицы; изменение определителя при перемене местами двух строк; определитель матрицы с двумя одинаковыми строками [Б, I.4, свойства 1-3].
3. Миноры и алгебраические дополнения [Б, I.4, определения, леммы 1-3].
4. Свойства определителей: разложение определителя по строке (столбцу); однородность и аддитивность определителя; определитель матрицы с пропорциональными строками; поведение определителя при элементарных преобразованиях 1-го типа [Б, I.4, определения, свойства 4-9].
5. Определитель Вандермонда [Б, I.5, пример 3].
6. Определитель ступенчатой матрицы [Б, I.6].
7. Теорема Крамера [Б, II.8].
8. Ранг матрицы [Б, II.9].
9. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях [Б, II.9].
10. Теорема Кронекера-Капелли [Б, II.11].
11. Свойства определителей: определитель произведения квадратных матриц [Б, III.15].
12. Обратная матрица, взаимная матрица, представление обратной к неособенной матрице при помощи взаимной [Б, III.16].
13. Характеристический многочлен. Собственные числа и собственные векторы матрицы [Б, III.17].
14. Совпадение собственных чисел с корнями характеристического многочлена [Б, III.17, теорема 1].
15. Теорема Гамильтона-Кэли [Б, III.17, теорема 4].