1 Комбинаторика, элементарная дискретная вероятность

Задание 1.1. По окончании семестра студентам требуется сдать пять экзаменов: по философии, обществознанию, социологии и два экзамена по математике. Считая, что порядок экзаменов выбирается случайно, найти вероятность того, что экзамены по математике будут стоять подряд.

Задание 1.2. Рассмотрим покер без замены карт и общей сдачи — каждый игрок просто получает пять карт на руки. Играем колодой на 54 листа (с двумя джокерами). Найти вероятность того, что конкретный игрок получит каре (4 карты одинакового достоинства, при этом джокер может считаться любой картой).

Задание 1.3. За столом сидят четыре мушкетера, у каждого в руках колода карт на 52 листа. Одновременно каждый достает из колоды одну карту и кладет на стол. Карты перемешивают и вскрывают.

1. Сколько возможных сочетаний карт может быть?
2. Равновероятны ли они?
3. Какова вероятность того, что лежат четыре туза?

Задание 1.4. В группе n студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов совпадает день рождения. Считаем, что все родились не в високосный год, день рождения случаен и все дни при этом равновероятны.

Задание 1.5. Монету подбрасывают n раз. Какова вероятность выпадения четного числа гербов?

Задание 1.6. Найти вероятность вытащить дубль из набора домино.

Задание 1.7. К семейной паре домой приходят n гостей. Все вместе в случайном порядке рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что хозяева будут сидеть рядом?

Задание 1.8. Из колоды в 52 карты случайно вынимают одну. Если рассмотреть события «выпала пика» и «выпала дама», то легко показать, что они будут независимы по определению. Сохранится ли независимость, если:

1. убрать из колоды пиковую даму;
2. убрать из колоды всех тузов;
3. убрать из колоды всех дам;
4. убрать из колоды всех пик;
5. убрать из колоды бубновую девятку;
6. добавить в колоду джокера;

Задание 1.9. Какова вероятность того, что две наугад выбранные кости домино можно приставить друг к другу?

Задание 1.10. Найти вероятность того, что:

1. дни рождения 12 человек придутся на 12 разных месяцев года (предполагается, что все месяцы равновероятны);

2. дни рождения 6 человек придутся в точности на два месяца;

3. для данных 30 человек 6 из 12 месяцев года содержат ровно по два дня рождения и 6 — по три.

Задание 1.11. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают одновременно n карт, $n < 52$. Одну из них смотрят — она оказывается королем. После этого ее перемешивают с остальными вынутыми картами. Найти вероятность того, что при втором вынимании карты из этих n мы снова получим короля.

Задание 1.12. Известно, что в обществе, состоящем из 4 человек, дни рождения трех приходятся на один месяц, а четвертого — на один из остальных одиннадцати. Считая вероятность рождения в каждом месяце равной $1/12$, найти вероятность того, что при этом:

1. указанные три лица родились в июле, а четвертое лицо в марте;

2. указанные три лица родились в июле, а четвертое лицо в одном из оставшихся одиннадцати месяцев.

Задание 1.13 (*)**.** Игральную кость выбрасывают n раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет нечетное число раз?

Задание 1.14 (*)**.** Погнутую монету (с вероятностью выпадения герба $p \in (0, 1)$) подбрасывают n раз. Какова вероятность выпадения четного числа гербов?

Задание 1.15 (*)**.** Рассмотрим покер без замены карт и общей сдачи — каждый игрок просто получает пять карт на руки. Играем колодой на 54 листа (с двумя джокерами). Найти вероятность того, что конкретный игрок получит *стрит* (пять карт со значениями, идущими подряд, при этом джокер может считаться любой картой).

2 Общие свойства вероятности, зависимость-независимость случайных величин

Задание 2.1. Доказать формально следующие свойства вероятности:

1. Монотонность: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

2. Непрерывность 2: пусть дана возрастающая последовательность событий $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots, B_i \in \mathcal{F}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

3. Формула включений-исключений: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Задание 2.2. Доказать формально следующие свойства вероятности:

1. $P(\varnothing) = 0$.

2. Непрерывность: пусть дана убывающая последовательность событий $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$, $B_i \in \mathcal{F}$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

Задание 2.3. Показать, что из равенства $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ не следует попарная независимость событий A_1, A_2, A_3.

Задание 2.4. Показать, что из попарной независимости событий A_1, A_2, A_3 не следует их совместная независимость.

Задание 2.5. Круглая мишень разделена на 10 колец и 4 прямоугольных сектора. Стрелок бьет по мишени и промахивается с вероятностью p, а в противном случае попадает в произвольную точку мишени. При каких p номер кольца и номер сектора будут независимы как случайные величины? *В случае промаха считаем формально номер сектора и номер кольца равными нулю*

Задание 2.6. Привести пример: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — одинаково распределенные случайные величины, при этом любые $n-1$ из них совместно независимы, а все n — нет.

Задание 2.7 (*)**.** Привести пример: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — одинаково распределенные НЕПРЕРЫВНЫЕ случайные величины, при этом любые $n-1$ из них совместно независимы, а все n — нет.

Задание 2.8 (*)**.** Привести пример $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — одинаково распределенные случайные величины такие, что любые $k < n$ из них совместно независимы,а любые $k+1$ — нет.

3 Геометрическая вероятность

Задание 3.1. На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают круглую монету радиуса r. Найти вероятность того, что монета пересечет линию.

Задание 3.2. На бесконечную клетчатую (размер клетки 1×1) плоскость бросают круглую монету радиуса r. Найти вероятность того, что монета пересечет линию.

Задание 3.3. Круглая мишень разделена на десять колец равной толщины. Кольца пронумерованы от 1 до 10, начиная с края. Стрелок бьет по мишени, при этом он с вероятностью 0.2 промахивается, а в противном случае попадает в произвольную точку мишени. Найти вероятность за два выстрела выбить ровно 10 очков.

Задание 3.4 (Задача Бюффона)**.** На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают тонкую спицу длины 1. Найти вероятность того, что спица пересечет линию.

Задание 3.5 (*)**.** На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают тонкую спицу длины l. Найти вероятность того, что спица пересечет линию.

Задание 3.6. На квадратном стенде нарисована круглая мишень. Края мишени касаются всех четырех краев стенда. Стрелок бьет по мишени, но попадает каждый раз в произвольную точку стенда. Найти вероятность попасть в мишень при единственном выстреле.

Задание 3.7. На отрезке [0, 1] случайно выбираются две точки. Рассмотрим следующие события:

- Событие А: левая точка ближе к 1, чем к 0;
- Событие В: расстояние между точками больше 0.5;
- Событие С: правая точка ближе к левой, чем к 1.

Найти вероятность каждого события. Выявить пары несовместных событий.

Задание 3.8. Двое договариваются о встрече в интервале между 12 и 13 часами дня. Какова вероятность, что они встретятся, если момент прихода каждого из них равновозможен в указанном интервале и времена ожидания равны соответственно τ_1 и τ_2?

Задание 3.9. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков с длинами, не превышающими длину единичного отрезка, можно составить треугольник.

Задание 3.10. На окружности наудачу выбираются три точки А, В, С. Какова вероятность того, что треугольник АВС остроугольный?

Задание 3.11. Найти вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ вещественны, если значения коэффициентов a, b равновозможны в квадрате: $(a, b) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Задание 3.12. На отрезке [0, 1] наудачу поставлены две точки M и N. Определить вероятность того, что длины каждого из трех образовавшихся отрезков не превосходят заданной величины α.

Задание 3.13. Буратино посадил на прямоугольный лист размером 20см на 25см круглую кляксу радиусом 1см. Сразу после этого Буратино посадил еще одну такую же кляксу, которая целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы не соприкасаются.

Задание 3.14. Стрелок бьет в круглую мишень радиуса 1, попадая равномерно в произвольную точку. Найти функцию распределения и плотность расстояния от точки попадания до центра мишени.

4 Условная вероятность, формула полной вероятности и формула Байеса

Задание 4.1. Четверо играют в покер (без джокеров, замены и общей сдачи). Какова вероятность получить каре (четыре карты одного достоинства из пяти), если известно, что у соседа справа роял-флеш (пять карт одной масти, подряд, начиная с туза)?

Задание 4.2. Бросаются два кубика. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков равно 20, если сумма очков равна 9?

Задание 4.3. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найти распределение количества выпавших троек, количества выпавших четверок и их совместное распределение

Задание 4.4. Игральную кость бросали до тех пор, пока не выпадет шестерка. Известно, что результате двойка выпала трижды. Какое число бросаний кости наиболее вероятно?

Задание 4.5. В ящике 15 теннисных мячей, из которых 9 новые. Случайно выбирают для игры три, играют с ними и кладут обратно (после игры их уже считают неновыми). Для следующей игры снова достают три мяча. Какова вероятность того, что все они новые?

Задание 4.6. В урне лежит один шар, черный либо белый, с одинаковой вероятностью. В урну кладут n белых шаров, затем достают k наудачу. Они все оказываются белыми. Какова вероятность того, что все оставшиеся шары — белые?

Задание 4.7. В ящике лежит 6 деталей, при этом среди них могут быть бракованные (любое количество бракованных деталей равновероятно). В ящик положили еще две бракованных детали, затем извлекли наудачу одну. Какова вероятность того, что эта деталь исправна? Если деталь исправна, какое исходное число бракованных деталей наиболее вероятно?

Задание 4.8. Из партии в пять изделий взято одно, оказавшееся бракованным. Исходно было известно, что количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое количество бракованных изделий наиболее вероятно?

Задание 4.9. Саша и Антон играют в игру. Саша подбрасывает монету до тех пор, пока не выпадет орел. В это время Антон бросает игральный кубик (на каждое бросание монеты) и суммирует выпавшие очки. В итоге Антон получил в сумме 5 очков. Какое число бросков кости он совершил с наибольшей вероятностью?

Задание 4.10. В урне лежит один шар, черный либо белый, с одинаковой вероятностью. В урну кладут один белый шар, затем достают один наудачу. Он оказывается белым. Какова вероятность того, что оставшийся шар — белый?

Задание 4.11. Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80%, три — с вероятностью, равной 50%, и два — с вероятностью 90%. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Задание 4.12. Три охотника охотились на кабана. Первый бьет кабана с одного выстрела с вероятностью 0.4, второй — с вероятностью 0.3, а третий — с вероятностью 0.2. Они одновременно заметили кабана и одновременно выстрелили. Когда они подошли к убитому кабану, выяснилось, что он был убит одной пулей. Какова вероятность, что его убил второй охотник?

Задание 4.13. Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80%, три — с вероятностью, равной 50%, и два — с вероятностью 90%. Какова вероятность того, что наудачу выбранный стрелок поразит цель?

Задание 4.14. Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80% , три — с вероятностью, равной 50%, и два — с вероятностью 90%. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Задание 4.15. Предположим, что у нас имеются три монетки, две из которых правильные, а третья является несимметричной, вероятность выпадения орла у которой $p = 1/3$. Мы случайным образом выбираем из этих трех монеток одну и подбрасываем ее пять раз. В результате такого эксперимента у нас один раз выпадает орел и четыре раза решка. Какая монетка была выбрана с большей вероятностью — идеальная или несимметричная?

5 Непрерывный случай формулы полной вероятности и формулы Байеса. Апостериорные распределения

Задание 5.1. По монете ударяют молотком и она случайным образом изгибается: вероятность выпадения орла становится $p \sim U[0,\,1]$ — равномерно распределена от 0 до 1. После чего монету подбрасывают. Какова вероятность выпадения орла?

Задание 5.2. По монете ударяют молотком и она случайным образом изгибается: вероятность выпадения орла становится $p \sim U[0,\,1]$ — равномерно распределена от 0 до 1. После чего монету подбрасывают дважды. Какова вероятность выпадения двух орлов?

Задание 5.3. По монете ударяют молотком, в результате орел начинает выпадать с вероятностью $p \sim U[0,\,1]$. Монету подбрасывают пять раз, орел выпал трижды. Какое значение p наиболее вероятно? Какой вид имеет распределение p и чему равны его матожидание и мода (наиболее вероятное значение)?

Задание 5.4. По монете ударяют молотком, в результате орел начинает выпадать с вероятностью $p \sim U[0,\,1]$. Монету подбрасывают n раз, орел выпал k раз. Какое значение p наиболее вероятно? Какой вид имеет распределение p и чему равны его матожидание и мода?

Задание 5.5. Мы ударяем по монетке молотком, в результате она изгибается случайным образом и вероятность выпадения орла становится $p \sim U[0,\,1]$. Затем мы начинаем подбрасывать монетку и получаем последовательность значений $b_1, b_2, \ldots$ (считаем орла за 1, а решетку за 0). Пусть $s_k = \sum_{i=1}^{k} b_i/k \to \pi$.

Для каждого k рассмотрим байесовское условное (апостериорное) распределение $\mathcal{D}_k$ для параметра p после результата k-го броска (т.е. k-е апостериорное распределение получено с использованием информации о первых k результатах бросания).

Установить вид этих распределений и найти слабый предел при $k \to \infty$. *Изменится ли результат, если в качестве априорного распределения параметра p взять не равномерное, а произвольное Бета-распределение?*

Задание 5.6. На заводе по заточке булавок был нарушен техпроцесс, в результате была выпущена партия булавок с потенциально высоким процентом брака. Известно, что доля бракованных булавок p имеет распределение с плотностью $f_p(x) = 3(1-x)^2$. Из этой партии случайно проверяют 100 и все оказываются заточенными неправильно. Какой процент брака наиболее вероятен?

Задание 5.7. На заводе по производству лампочек наладчик настраивает станок на глаз. В результате λ — характеристика станка, влияющая на качество выпускаемых лампочек, оказывается распределена случайно и имеет Гамма-распределение (плотность $f_\lambda(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\theta}$, Γ — гамма-функция Эйлера) с параметрами $k = 9, \theta = 1$. Считаем, что время работы лампочки (в минутах), сделанной с качеством λ распределено экспоненциально с параметром λ.

Первую выпущенную лампочку проверяют на ОТК. Она сгорает ровно через минуту. Найти распределение, моду и матожидание величины λ. *Выводить матожидание и моду для Гамма-распределения не надо, можно посмотреть в таблице*

Задание 5.8. На заводе по производству лампочек наладчик настраивает станок на глаз. В результате λ — характеристика станка, влияющая на качество выпускаемых лампочек, оказывается распределена случайно и имеет Гамма-распределение (плотность $f_\lambda(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\theta}$, Γ — гамма-функция Эйлера) с параметрами $k = 9, \theta = 1$. Считаем, что время работы лампочки (в минутах), сделанной с качеством λ распределено экспоненциально с параметром λ.

Первые выпущенные n лампочек проверяют на ОТК. Они сгорают через $t_1, t_2, \ldots, t_n$ минут соответственно. Найти распределение, моду и матожидание величины λ. *Выводить матожидание и моду для Гамма-распределения не надо, можно посмотреть в таблице*

Задание 5.9. Пусть распределение случайной величины ξ — смесь d распределений с плотностями $f_1(x), \ldots, f_d(x)$ взятых с весами $p_1, \ldots, p_k$. Пусть в случайном эксперименте получено значение $\xi = a$. К какой из компонент смеси наиболее вероятно (в смысле байесовской вероятности) относится полученное наблюдение? *Сюжетно задача выглядит так. Пусть случайно взятый работник с некоторой вероятностью (p_1) оказывается рабочим цеха (в противном случае он ИТР). Пусть нам известны распределения (f_1, f_2) роста работников в каждой группе. Мы измеряем рост работника (a) и хотим понять, к какой группе он относится (более вероятно относится).*

Сюда бы добавить задач на другие распределения, кроме Бета и Гамма. Нормальное точно можно

6 Свойства распределений

Задание 6.1. Вывести формулу вероятности для биномиального распределения:

$$P_{n,p}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Задание 6.2. Вывести формулу вероятности для гипергеометрического распределения:

$$P_{N,K,n}(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Задание 6.3. Два стрелка стреляют в круглую мишень, каждый попадает в случайную ее точку. Найти плотность распределения расстояния до центра мишени от точки попадания второго стрелка, если известно, что он оказался более близок к центру, чем первый?

Задание 6.4. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_d \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, независимы. Найти распределение с.в. $\eta = \sum_{i=1}^d \xi_i / d$, т.е. распределение выборочного среднего.

Задание 6.5. Пусть $\alpha \sim U[0,\,1], n \in \mathsf{N}$. Найти распределения величин $\lceil n\alpha \rceil$ и $\{n\alpha\}$. *Целая и дробная часть* Будут ли они независимы?

Задание 6.6. Пусть $\xi_1, \xi_2 \sim U[0,\,1]$ — независимые равномерно распределенные с.в. Найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Задание 6.7. Пусть $\alpha \sim U[0,\,1]$. Найти условное распределение $\alpha \mid \alpha > a$.

Задание 6.8. Пусть $\xi \sim G(\lambda)$ (геометрическое). Найти условное распределение $\xi - a \mid \xi > a$.

Задание 6.9. Пусть ξ, η — независимые случайные величины с плотностями $f_\xi(x), f_\eta(x)$ соответственно. Найти плотность с.в. $\xi + \eta$.

Задание 6.10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d \sim \Gamma(\theta, k_i)$ — независимые случайные величины с Гамма-распределением. *θ одна на всех, а k могут быть разными* Найти распределение случайной величины $\eta = \sum_i \xi_i$.

Задание 6.11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d$ — независимые нормально распределенные случайные величины с матожиданиями μ_i и дисперсиями σ_i^2. Найти распределение $\eta = \sum_i \xi_i$.

Решение. Ответ: $\eta \sim \mathcal{N}(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2)$.

Не умаляя общности, сделаем три упрощения. (1) Нам достаточно доказать результат для $d = 2$, а далее по индукции. (2) Можно считать, что $\mu_1 = \mu_2 = 0$, так как параметр μ имеет смысл сдвига, т.е. если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $\xi + a \sim \mathcal{N}(\mu + a, \sigma^2)$. Это следует, например, из формулы изменения плотности при линейном преобразовании. (3) Из нее же следует, что мы можем считать $\sigma_1^2 = 1$. σ_2^2 (не обязательно равную 1) обозначим за σ^2.

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

Константный множитель обозначим за C, он не будет нас интересовать, т.к. это просто нормировка.

$$= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2\sigma^2+(x-t)^2}{2\sigma^2}} dt = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2(\sigma^2+1)-2tx+x^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2(\sigma^2+1)-2tx+x^2/(\sigma^2+1)-x^2/(\sigma^2+1)+x^2}{2\sigma^2}} dt = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(t\sqrt{\sigma^2+1}-x/\sqrt{\sigma^2+1}\right)^2+x^2\left(1-(\sigma^2+1)^{-1}\right)}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= C \cdot e^{-\frac{x^2\left(1-(\sigma^2+1)^{-1}\right)}{2\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(t\sqrt{\sigma^2+1}-x/\sqrt{\sigma^2+1}\right)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

Оставшийся интеграл от x на самом деле не зависит (это легко показать, сделав замену переменной; пределы интегрирования при этом не изменятся), следовательно, он уходит в константу.

$$= C' e^{-\frac{x^2\left(1-(\sigma^2+1)^{-1}\right)}{2\sigma^2}} = C' e^{-\frac{x^2(\sigma^2+1-1)}{2\sigma^2(\sigma^2+1)}} = C' e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)}}.$$

Итак, получили требуемую плотность (с точностью до константы, но константа естественно получается из нормировки).

Задание 6.12. Пусть случайная величина η имеет распределение, являющееся смесью распределений случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_d$ с вероятностями (весами) $p_1, \ldots, p_d$. Выразить матожидание, функцию распределения, плотность (если все с.в. ξ_i непрерывны), производящую функцию (если они дискретны) случайной величины η.

Задание 6.13. Исходя из определения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ (среднего, дисперсии, асимметрии и эксцесса) и их значений для нормального распределения определить γ_k.

7 Матожидание, дисперсия, корреляция, функция распределения, плотность

Задание 7.1. Бросаются два кубика. Чему равно математическое ожидание суммы выпавших очков? Произведения выпавших очков? Чему равна дисперсия суммы выпавших очков?

Задание 7.2. Найти корреляцию между числом выпадения единиц и шестерок при n бросаниях кости.

Задание 7.3. Привести примеры абсолютно непрерывного распределения, не имеющего дисперсии, но имеющего матожидание и распределения, не имеющего даже матожидания.

Задание 7.4. Привести примеры дискретного распределения, не имеющего дисперсии, но имеющего матожидание и распределения, не имеющего даже матожидания.

Задание 7.5. Найти матожидание и дисперсию для негативно-биномиального распределения $NB(r,p)$, т.е. распределение числа успехов до r-й неудачи в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p.

Задание 7.6. Найти дисперсию для распределения Пуассона с параметром λ и для нормального распределения с параметрами μ, σ^2.

Задание 7.7. Привести примеры непрерывного распределения, не имеющего дисперсии, но имеющего матожидание и распределения, не имеющего даже матожидания.

Задание 7.8. Пусть случайная величина ξ имеет симметричное распределение (т.е. $\mathcal{L}\xi \equiv \mathcal{L} - \xi$). Найти $\operatorname{cor}(\xi, |\xi|)$.

Задание 7.9. Пусть ξ, η, ζ — независимые случайные величины с ненулевой дисперсией. Могут ли быть независимы $\xi + \eta$ и $\xi + \zeta$?

Задание 7.10. Какое наименьшее и набольшее значение может принимать дисперсия суммы двух случайных величин с дисперсиями s_1, s_2?

Задание 7.11. Картонный круг радиуса r бросают случайно на клетчатый лист бумаги (размер клетки 1×1). Найти математическое ожидание числа узлов клеток, накрытых кругом.

Задание 7.12. Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор. Пусть все компоненты имеют ненулевую дисперсию. *Матрицей корреляций* для него будем называть матрицу $\mathbf{C} \in \mathsf{R}^{d \times d}$: $((\mathbf{C})_{i,j} = \rho(\xi_i, \xi_j))$. Покажите, что если матрица корреляций вырождена (т.е. $\operatorname{rank} \mathbf{C} < d$), то компоненты линейно зависимы, т.е. существует способ выразить одну случайную величину как линейную комбинацию остальных (почти наверное). *Обращу внимание. Линейная зависимость и линейная независимость для случайных величин не исчерпывают всех возможных вариантов. Линейная зависимость в случае двух величин означает корреляцию* 1 *или* −1. *Линейная независимость (некоррелированность) — корреляцию* 0. *Другие корреляции означают, что величины зависимы, но не строго линейно*

Задание 7.13. На разлинованную с шагом 1 плоскость бросают монету радиуса r. Описать распределение числе пересеченных монетой линий. Чему равно его матожидание и дисперсия? *Подумайте, как ответ согласуется с задачей про бросание спицы*

Задание 7.14. В лотерее имеется m_1 выигрышных билетов на сумму s_1, …, m_k билетов на сумму s_k. Какую цену билета надо установить, чтобы матожидание выигрыша равнялось половине его стоимости?

Задание 7.15. Установить следующие факты:

1. $\mathsf{E}(c\xi) = c\mathsf{E}\xi$
2. $\xi \geq 0 \Rightarrow \mathsf{E}\xi \geq 0$
3. $\mathsf{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathsf{E}\xi_1 + \mathsf{E}\xi_2$
4. $\mathsf{E}(\xi_1\xi_2) = \mathsf{E}\xi_1 \cdot \mathsf{E}\xi_2$, если ξ_1, ξ_2 независимы
5. $\mathsf{D}(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi$
6. $\mathsf{D}\xi = 0 \Rightarrow \xi \equiv c$
7. $\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi^2) - (\mathsf{E}\xi)^2$
8. $\mathsf{D}(\xi_1 \pm \xi_2) = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2$, если ξ_1, ξ_2 независимы

Можно ли ослабить условия независимости в утверждениях?

Задание 7.16. Привести пример зависимых случайных величин, имеющих, тем не менее, нулевую корреляцию.

Задание 7.17. Найти матожидание и дисперсию следующих распределений:

1. Бернулли $B(p)(p, pq)$
2. Биномиальное $Bin(n, p)(np, npq)$
3. Геометрическое $G(p)(1/p, q/p^2)$
4. Пуассона $\Pi(\lambda)(\lambda, \lambda)$
5. Экспоненциальное $Exp(\lambda)(1/\lambda, 1/\lambda^2)$
6. Нормальное $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)(\mu, \sigma^2)$
7. Равномерное $U[a, b]((a + b)/2, (a - b)^2/12)$
8. Бета $\mathcal{B}(\alpha, \beta)(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)})$
9. Гамма $\Gamma(k, \theta)(k\theta, k\theta^2)$

Задание 7.18. Пусть вероятность купить в магазине просроченную кильку составляет 2%. Сколько в среднем банок кильки надо купить, чтобы отравиться? Считаем, разумеется, что события результата разных покупок независимы.

Задание 7.19. Показать, что $|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathsf{D}\xi\mathsf{D}\eta}$.

Задание 7.20. Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор с матрицей ковариаций Σ. Найти дисперсию $\langle \bar{c}, \bar{\xi} \rangle$ для некоторого вектора $\bar{c} \in \mathsf{R}^d$.

Задание 7.21. Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор с матрицей ковариаций Σ. Найти матрицу ковариаций вектора $\mathbf{A}\bar{\xi}$ для некоторой матрицы $\mathbf{A} \in \mathsf{R}^{k\times d}$.

Задание 7.22. Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор. Пусть все компоненты имеют ненулевую дисперсию. *Матрицей ковариаций* для него будем называть матрицу $\mathbf{\Sigma} \in \mathsf{R}^d$: $(\mathbf{\Sigma}_{i,j} = \rho(\xi_i, \xi_j))$. Покажите, что если матрица ковариаций вырождена (т.е. $\operatorname{rank} \mathbf{\Sigma} < d$), то компоненты линейно зависимы, т.е. существует способ выразить одну случайную величину как линейную комбинацию остальных (почти наверное). *Обращу внимание. Линейная зависимость и линейная независимость для случайных величин не исчерпывают всех возможных вариантов. Линейная зависимость в случае двух величин означает корреляцию* 1 *или* -1. *Линейная независимость (некоррелированность) — корреляцию* 0. *Другие корреляции означают, что величины зависимы, но не строго линейно*

Задание 7.23. Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор с матрицей ковариаций $\mathbf{\Sigma}$. Пусть $\mathbf{\Sigma}$ невырождена. Найти такую невырожденную матрицу $\mathbf{O} \in \mathsf{R}^{d\times d}$, что компоненты вектора $\mathbf{O}\bar{\xi}$ линейно независимы.

Задание 7.24. С.к.о. для каждой из n независимых случайных величин равно σ. Найти с.к.о. для суммы и среднего арифметического этих случайных величин. *Почему существенна независимость с.в? Достаточно ли попарной независимости в этом случае или задача станет неопределенной? Можно ли как-то ослабить условие независимости?*

Задание 7.25. Показать, что для любых случайных величин ξ, η: $|\operatorname{cor}(\xi, \eta)| \leq 1$.

Задание 7.26. Произведено четыре выстрела по мишени с вероятностями попадания $0.6, 0.4, 0.5$ и 0.7 соответственно. Найти матожидание и дисперсию общего количества попаданий.

Задание 7.27. Спицу длины l бросают случайно на случайно повернутую разлинованную с шагом 1 плоскость. Найти математическое ожидание числа пересечений спицей линий.

Задание 7.28. Аналогично предыдущей задаче, но бросают согнутую в виде ломаной спицу длины l. Изменится ли ответ, если в местах сгибов спица будет свободно (случайно) сгибаться-разгибаться?