Элементарная комбинаторика

1 Основные правила перечислительной комбинаторики

1.1. Напомним вначале очень кратко основные понятия теории множеств.

Определение 1.1. Множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется совокупность различимых объектов x_i, $i = 1, \ldots, n$, объединенных по некоторому признаку.

В качестве характерного примера можно рассмотреть, например, множество X всех студентов, находящихся в данной аудитории. Действительно, все студенты различимы, отличны друг от друга и объединены по признаку "собрались в данной аудитории".

Определение 1.2. Мощностью $|X|$ множества X называется количество элементов в нем. Как правило, мы будем рассматривать конечные множества, в которых $|X| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и называть их n-множествами.

1.1.1. Основные операции над множествами — это объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и разность $A \setminus B$ двух множеств A и B. В случае, если множество A является подмножеством некоторого более широкого множества X, удобно также рассматривать операцию дополнения $A' := X \setminus A$ множества A.

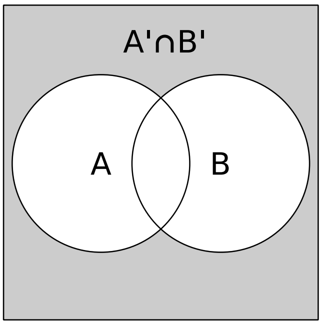

Рис. 1: Пересечение дополнений двух множеств

Свойства операций над множествами удобно изучать графически, с использованием так называемых *диаграмм Эйлера-Венна* (смотри рисунок 1). Например, с их помощью достаточно просто проиллюстрировать справедливость законов де Моргана

$$A' \cap B' = (A \cup B)', \qquad A' \cup B' = (A \cap B)'. \tag{1}$$

1.1.2. В дальнейшем мы достаточно часто будем использовать понятие покрытия множества X семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ множеств, а также всевозможные частные случаи этого понятия.

Определение 1.3. Семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ называется *покрытием* множества X, если их объединение дает нам все множество X:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X.$$

Важным частным случаем покрытия является понятие разбиения множества.

Определение 1.4. Говорят, что семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ образует *разбиение* множества X, если

1. множества $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing \ \ \forall i \neq j$;
3. $X_1 \cup X_2 \bigcup \ldots \cup X_k = X$.

Элементы X_i этого семейства называются *блоками* разбиения.

В качестве характерного примера можно рассмотреть разбиение студентов данного курса на группы. Студенческие группы являются при этом блоками данного разбиения.

Если по каким-то причинам оказывается важным порядок следования блоков, то говорят об *упорядоченном разбиении* $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ множества X. Например, если мы выводим группы на сцену для вручения им дипломов, то важен порядок, в котором они туда выходят. Следовательно, в данном случае мы получаем упорядоченное разбиение студентов данного курса.

Наконец, еще одним частным случаем покрытия X семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является понятие *разделения* множества X. Разделение есть аналог упорядоченного разбиения, в котором допускаются пустые блоки. Точное определение таково:

Определение 1.5. Разделением множества X называется упорядоченная последовательность $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ возможно пустых, попарно непересекающихся множеств, объединение которых дает все множество X.

1.1.3. Еще одной часто использующейся в комбинаторике операцией над множествами является операция декартова произведения множеств.

Определение 1.6. Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B := \{(a, b) \,|\, a \in A, \ b \in B\}$$

всех упорядоченных пар (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$.

В качестве простейшего примера декартова произведения множеств обычно приводят шахматную доску. Любая клетка шахматной доски имеет координаты “буква-цифра”, например, $e5$ или $h4$. Иными словами, координаты клеток шахматной доски являются элементами декартова произведения множеств $A = \{a, b, \ldots, h\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

В частном случае множества A и B могут совпадать. В этом случае декартово произведение $A \times A$ обозначается через $A^{(2)}$.

Определение 1.7. Декартовым произведением k множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \,|\, x_i \in X_i, \ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

всевозможных упорядоченных k-элементных последовательностей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

В частном случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = X$ имеем декартову степень $X \times X \times \ldots \times X =: X^{(k)}$.

1.1.4. Любой элемент $X^{(k)}$ есть упорядоченный набор из k элементов множества X, в котором некоторые элементы могут повторяться. Если же в таком k-множестве порядок элементов не важен, говорят о *k-мультимножестве над множеством X*. Формальное определение k-мультимножества таково.

Определение 1.8. k-мультимножеством над n-элементным множеством X называется пара (X, φ), где $\varphi\colon X \to \mathbb{Z}_+$ есть функция, сопоставляющая любому элементу $x \in X$ количество $\varphi(x)$ его вхождений в k-мультимножество.

Любую функцию φ такого рода можно определить с помощью множества Ξ упорядоченных пар

$$\Xi := \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}.$$

Поэтому, например, 3-мультимножество над множеством $X = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов x и одного элемента y, можно формально записывать в виде $(X, \{(x, 2), (y, 1)\})$. Однако чаще вместо такой формальной записи используют более наглядную форму записи вида $\{x, x, y\}$.

Самый простой и понятный пример мультимножества — это монеты в кошельке. В этом примере в качестве множества X выступает множество из девяти монет разного достоинства:

$$X = \{1 \text{ копейка}, 5 \text{ копеек}, 10 \text{ копеек}, 50 \text{ копеек}, 1 \text{ рубль}, 2 \text{ рубля}, 5 \text{ рублей}, 10 \text{ рублей}\}.$$

Любой набор из этих монет в количестве k штук образует k-мультимножество над множеством X.

1.1.5. Теория множеств как раздел математики создавалась значительно позже комбинаторики. Поэтому некоторые наиболее важные понятия теории множеств исторически получили в комбинаторике свои, специфические названия. Именно,

1. k-сочетанием без повторений называется любое k-элементное подмножество n-элементного множества;
2. k-сочетанием с повторениями называется любое k-мультимножество над n-множеством;
3. k-перестановкой без повторений называется упорядоченное k-подмножество n-элементного множества;
4. k-перестановкой с повторениями называется любой элемент декартовой степени $X^{(k)}$.

1.2. Теперь перейдем к двум самым простым, но в то же время достаточно важным правилам перечислительной комбинаторики — правилу суммы и правилу произведения.

1.2.1. Начнем с простейшего примера: пусть на одном блюде лежат три яблока, а на втором — две груши; сколькими способами можно выбрать один фрукт? Ответ очевиден: пятью способами.

Обобщающее этот пример простейшее *правило суммы* можно сформулировать так: если некоторый объект из множества A можно выбрать k способами, и, вне зависимости от выбора этого объекта, можно n способами выбрать некоторый элемент множества B, то выбор объекта из множества A *или* из множества B можно осуществить $k+n$ способами.

Очевидна переформулировка этого правила на языке теории множеств: пусть пересечение двух множеств A и B пусто; тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

В частности, если $A \subset X$ и A' — дополнение множества A, то

$$|A| + |A'| = |X|. \tag{2}$$

В более общем случае, рассматривая произвольное разбиение множества X на блоки, имеем равенство вида

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|,$$

которое также называется правилом суммы в комбинаторике.

1.2.2. Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|.$$

Приведем простейший пример на применение этого правила в комбинаторике. Пусть в аудитории находятся 32 студента одной группы, 24 студента другой группы и 17 студентов третьей группы. В этом случае тройку, состоящую из представителей каждой группы, можно выбрать $32 \cdot 24 \cdot 17$ способами.

1.3. Наряду с правилом суммы, в элементарной комбинаторике также достаточно часто используется и несложное его обобщение — так называемый *принцип включения-исключения*. Если правило суммы связано с разбиением множества X, то принцип включения-исключения связан с некоторым произвольным покрытием этого n-множества семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сформулируем его для самого простого случая двух множеств.

1.3.1. Рассмотрим два конечных множества A и B, пересечение которых может быть и непусто. Тогда количество элементов в объединении этих множеств, очевидно, равно

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3}$$

Действительно, когда мы считаем количество $|A|$ элементов в множестве A и складываем его с количеством $|B|$ элементов в множестве B, мы любой элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

Равенство (3) можно называть обобщенным правилом суммы — оно обобщает правило суммы на случай, когда пересечение двух множеств не пусто.

1.3.2. Предположим теперь, что A и B являются подмножествами некоторого более широкого множества X. В этом случае у множества $A \subset X$ и множества $B \subset X$ имеются дополнения к ним — множества A' и B', причем $A \cup A' = B \cup B' = X$.

Рассмотрим теперь пересечение $A' \cap B'$ дополнений множеств A и B. Согласно одной из теорем де Моргана (1), $A' \cap B' = (A \cup B)'$. Следовательно, количество элементов в этом пересечении с учетом равенства (2) и обобщенного правила суммы (3) можно сосчитать так:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Равенство

$$|A' \cap B'| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \tag{4}$$

и называется в комбинаторике принципом включения-исключения.

1.3.3. Приведем простейший пример его использования. Пусть в аудитории находятся 30 человек, 20 человек из которых знают английский, 12 — французский, а 6 человек знают оба языка. Сколько человек не знает ни один из этих иностранных языков? Ответ, согласно принципу включения-исключения (4), следующий:

$$N = 30 - 20 - 12 + 6 = 4.$$

1.3.4. Несложно обобщить равенства (3) и (4) на случай большего количества множеств. Например, для трех множеств A, B, C соответствующие формулы выглядят так:

а) обобщенное правило суммы:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|; \tag{5}$$

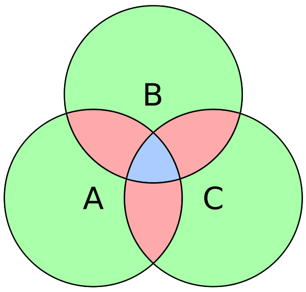

Рис. 2: Диаграмма Эйлера-Венна для трёх множеств

б) принцип включения-исключения:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|. \tag{6}$$

Действительно, рассмотрим, к примеру, левую часть равенства (5). Она подсчитывает количество элементов, принадлежащих объединению трех множеств. Если элемент x_1, принадлежащий этому объединению, содержится в множестве A, но не содержится в множествах B и C, то он один раз подсчитывается в правой части равенства (5) (слагаемое $|A|$). Если элемент x_2 принадлежит множествам A и B, но не принадлежит C, то в правой части (5) этот элемент входит в слагаемые $|A|$, $|B|$ и $-|A \cap B|$, то есть также подсчитывается ровно один раз. Наконец, если x_3 принадлежит пересечению всех трех множеств, то за этот элемент отвечают все слагаемые в правой части (5). Так как четыре из них входят со знаком плюс, а три — со знаком минус, то этот элемент также считается в правой части (5) лишь однажды.

Упражнения

1.1. Имеется пять видов конвертов без марок, и четыре вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

1.2. Сколько чисел в диапазоне от 0 до $999\,999$ не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?

1.3. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих ровно одну цифру 7?

1.4. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих хотя бы одну цифру 7?

1.5. Сколько целых чисел от 1 до 999 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?

1.6. Доказать следующую двойственную к (5) формулу:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

2 k-сочетания из n элементов. Биномиальные коэффициенты.

2.1. В качестве первого важного примера на применение описанных в первом параграфе правил сосчитаем количество k-сочетаний без повторений из n элементов. Количество таких k-сочетаний при произвольных n и k носит название биномиальных коэффициентов. Ранее в советской литературе они обозначались через C_n^k. В настоящее время для этих коэффициентов используется обозначение $\binom{n}{k}$ (читается "из n по k").

2.1.1. Обычно на вопрос, чему равны биномиальные коэффициенты, вспоминают формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

В следующем параграфе мы получим более точное выражение для этих коэффициентов, позволяющее обобщить данное понятие на случай целых, вещественных и даже комплексных значений n. Сейчас же мы с помощью правила суммы выведем рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов.

2.1.2. Введем множество Σ_k всех k-элементных подмножеств n-элементного множества X. Например, для $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ множество $\Sigma_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$. Разобьем Σ_k на два блока — блок $\Sigma_k^{(1)}$, k-элементные подмножества которого содержат элемент x_1, и блок $\Sigma_k^{(2)}$, подмножества которого этот элемент не содержат. Понятно, что это — непустые, непересекающиеся подмножества, объединение которых дает нам все множество Σ_k. Поэтому по правилу суммы

$$\binom{n}{k} = |\Sigma_k| = |\Sigma_k^{(1)}| + |\Sigma_k^{(2)}|.$$

Осталось выразить через биномиальные коэффициенты количество элементов в каждом из блоков $\Sigma_k^{(1)}$, $\Sigma_k^{(2)}$. А это делается довольно легко.

2.1.3. Действительно, во всех подмножествах первого блока элемент x_1 уже выбран, и нам остается выбрать $(k-1)$-элементные подмножества из $(n-1)$-элементного множества $X \setminus x_1$. Сделать это можно $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Во втором блоке содержатся k-элементные подмножества множества $X \setminus x_1$, состоящего из $(n-1)$-го элемента. Их количество, очевидно, равно $\binom{n-1}{k}$. Таким образом окончательно имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1. \tag{7}$$

2.1.4. Соотношение (7) следует дополнить начальными и граничными условиями. Так как k-элементных подмножеств n-элементного множества в случае $k > n$ не существует, то

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{при} \quad k > n.$$

Далее, пустое подмножество можно выбрать всегда и только одним способом; поэтому

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall\ n \geqslant 0.$$

Используя эти условия, можно шаг за шагом вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$. Часто их записывают в виде так называемого треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

2.1.5. Как видно, треугольник Паскаля симметричен, т.е. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Комбинаторное доказательство этого факта очевидно. Действительно, выбирая любое k-элементное множество, мы тем самым однозначно выбираем и дополнение к нему, т.е. $(n-k)$-элементное множество. Следовательно, количество k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств совпадает.

2.1.6. Наряду с треугольником Паскаля мы будем также активно пользоваться и другим графическим представлением чисел $\binom{n}{k}$. Именно, рассмотрим координатную плоскость (n, k), и в точках с координатами (n, k), $n \geqslant 0$, $k = 0, \ldots, n$ отметим числа $\binom{n}{k}$:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

В таком представлении числа $\binom{n}{k}$ можно трактовать как количество различных путей, состоящих из диагональных $(1, 1)$ и вертикальных $(1, 0)$ отрезков, выходящих из начала координат — точки $(0, 0)$, и оканчивающихся в точке с координатами (n, k). Заметим, что в точку с координатами (n, k) мы можем попасть только из точек с координатами $(n-1, k-1)$ и $(n-1, k)$. Как следствие, рекуррентное соотношение (7) в данном представлении можно трактовать следующим образом: количество путей в точку с координатами (n, k) складывается из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k-1)$, и из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k)$.

2.2. В качестве следующего применения правила суммы в комбинаторике докажем следующее важное тождество для коэффициентов $\binom{n}{k}$ — формулу суммирования по верхнему индексу:

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k} = \underbrace{\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\ldots+\binom{k-1}{k}}_{=0}+\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k} = \sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{8}$$

2.2.1. Для формального доказательства этого тождества применим рекуррентное соотношение (7) к коэффициенту $\binom{m+1}{k+1}$:

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$$

Просуммируем теперь полученное равенство по m от k до n:

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k} &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1}\binom{m+1}{k+1} - \sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k+1} = \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1}\binom{m+1}{k+1} - \sum_{m=k+1}^{n}\binom{m}{k+1} = \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m'=k+1}^{n}\binom{m'}{k+1} - \sum_{m=k+1}^{n}\binom{m}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

2.2.2. Комбинаторное доказательство тождества (8) основано на следующем общем подходе: мы разбиваем множество Σ_{k+1} всех $(k+1)$-элементных подмножеств $(n+1)$-элементного множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ на блоки, подсчитываем количество элементов в каждом блоке, а затем пользуемся правилом суммы для подсчета числа $|\Sigma_{k+1}| = \binom{n+1}{k+1}$.

Разбиение множества Σ_{k+1} будем проводить следующим образом. В первый блок разбиения мы включим все $(k+1)$-элементные подмножества, содержащие элемент x_{n+1}; во второй — $(k+1)$-элементные подмножества, содержащие x_n и не содержащие x_{n+1}; в третий — $(k+1)$-элементные подмножества, содержащие x_{n-1} и не содержащие x_n и x_{n+1} и т.д. В последний блок включим $(k+1)$-элементное подмножество, не содержащее элементов $x_{k+2}, \ldots, x_n, x_{n+1}$, т.е. подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$.

Число элементов в первом блоке равно $\binom{n}{k}$, во втором — $\binom{n-1}{k}$, в третьем — $\binom{n-2}{k}$, и так далее. В последнем блоке содержится ровно один элемент. Складывая эти коэффициенты, получаем тождество (8).

Пример 2.1. Пусть $n = 4$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $k = 2$, $k+1 = 3$; приведем список всех трехэлементных подмножеств этого множества:

$$\begin{array}{ccccc}\{x_1,x_2,x_3\}, & \{x_1,x_2,x_4\}, & \{x_1,x_2,x_5\}, & \{x_1,x_3,x_4\}, & \{x_1,x_3,x_5\}, \\ \{x_1,x_4,x_5\}, & \{x_2,x_3,x_4\}, & \{x_2,x_3,x_5\}, & \{x_2,x_4,x_5\}, & \{x_3,x_4,x_5\}.\end{array}$$

В первый блок разбиения этого множества подмножеств включим подмножества, содержащие элемент x_5; таковых имеется $\binom{4}{2} = 6$ штук. Из *оставшегося* списка выберем все подмножества, содержащие x_4; их $\binom{3}{2} = 3$ штуки. Наконец, у нас остается единственное подмножество элементов, не содержащих ни x_4, ни x_5, т.е. подмножество $\{x_1, x_2, x_3, \}$.

2.3. Название “биномиальные коэффициенты” связано с тем, что они, помимо всего прочего, встречаются в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}. \tag{9}$$

2.3.1. Комбинаторное доказательство этой формулы довольно элементарно: нужно просто расписать $(x+y)^n$ в виде произведения n сомножителей

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{1} \cdot \underbrace{(x+y)}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{n}$$

и пометить каждый из таких сомножителей числом в диапазоне от единицы до n. В результате мы имеем множество X, состоящее из n *различных* экземпляров сомножителей вида $(x+y)$.

После перемножения этих n скобок получается определенный набор слагаемых вида $x^k y^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Для подсчета количества этих слагаемых при фиксированном значении параметра k заметим, что любое слагаемое $x^k y^{n-k}$ можно получить так: выбрать в n-элементном множестве X k-элементное подмножество, взять в этом подмножестве в качестве сомножителей переменные x, а в оставшемся $(n-k)$-элементном подмножестве выбрать в качестве сомножителей переменные y. Как следствие, количество слагаемых $x^k y^{n-k}$ совпадает с количеством способов выбрать k-элементное подмножество n-элементного множества X и равно $\binom{n}{k}$.

2.3.2. Формула (9) оказывается чрезвычайно полезной для вывода разного рода соотношений, связанных с биномиальными коэффициентами. Например, полагая в ней $x = y = 1$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Иными словами, мы формально доказали тот факт, что количество *всех* подмножеств данного n-множества равно 2^n. Комбинаторное доказательство этого факта будет дано в следующем параграфе.

2.3.3. Далее, полагая в (9) $x = -1$, $y = 1$, получаем важное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \tag{10}$$

2.3.4. Наконец, продифференцируем (9) по x:

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}\, y^{n-k}.$$

Подставляя в это равенство $x = y = 1$, получим еще одно полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

2.4. Перейдем теперь к задачам, связанным с подсчетом k-сочетаний с повторениями.

2.4.1. Начнем с примера. Пусть множество X состоит из двух чисел 1 и 2. Выпишем все 3-сочетания с повторениями из 2-множества X:

$$\{1, 1, 1\}, \qquad \{1, 1, 2\}, \qquad \{1, 2, 2\}, \qquad \{2, 2, 2\}.$$

Как видно, таковых оказалось 4 штуки. Как подсчитать это количество в общем случае?

2.4.2. Для решения данной задачи воспользуемся чрезвычайно полезным и часто использующимся в комбинаторике *принципом биекции.* Формально этот принцип можно сформулировать следующим образом: пусть X, Y — пара конечных множеств, и пусть существует биекция $f : X \to Y$, т.е. такое отображение, что

$$\forall\, y \in Y \qquad\qquad \exists!\, x \in X : \qquad\qquad y = f(x).$$

Тогда количество элементов в множествах X и Y совпадают: $|X| = |Y| = n$.

2.4.3. Неформально использование принципа биекции можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вы устраиваете вечеринку и приглашаете на нее довольно много друзей. Как гостеприимный хозяин, вы встречаете всех своих друзей на входе в дом, но запоминаете только пришедших к вам девушек. В какой-то момент вы решаете подсчитать, сколько парней пришло к вам на вечеринку. Вы знаете количество пришедших к вам девушек, и вам кажется, что количество девушек и парней одинаково. Как вам быстро проверить это предположение? Ответ достаточно очевиден: попросить каждую девушку взять ровно одного парня за руку. Если в результате этой процедуры все множество гостей разбилось на пары, то ваше предположение окажется верным. Тем самым вы сильно упростили себе жизнь — вам не пришлось проделывать довольно утомительную работу по пересчету пришедших к вам парней; вы просто воспользовались для их подсчета результатом уже проделанной работы по пересчету пришедших к вам девушек.

2.4.4. Вернемся теперь к задаче подсчета всех k-сочетаний с повторениями, т.е. всех k-мультимножеств над n-множеством X. Для подсчета количества таких мультимножеств нам будет удобнее вначале конкретизировать n-множество X, а именно, взять в качестве X множество $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел. Любое k-мультимножество такого множества можно записать, очевидно, в следующем виде:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Например, 3-мультимножество $\{1, 1, 2\}$ над 2-множеством $X = \{1, 2\}$ можно записать так:

$$1 \leqslant (a_1 = 1) \leqslant (a_2 = 1) \leqslant (a_3 = 2) \leqslant (n = 2).$$

Теперь превратим в этой цепочке все нестрогие неравенства в строгие. Для этого мы к a_2 прибавим единицу, к a_3 — двойку, к a_4 — тройку, и так далее. К последнему числу a_n мы, таким образом, добавим число $(k-1)$. В результате получим цепочку строгих равенств вида

$$1 \leqslant a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 < \ldots < a_k + (k-1) \leqslant n + (k-1).$$

В нашем примере

$$1 \leqslant (a_1 = 1) < (a_2 + 1 = 2) < (a_3 + 2 = 4) \leqslant (n + (3-1) = 4).$$

Теперь: зачем нам все это было нужно? Дело в том, что в результате этой операции мы получили некоторое k-элементное подмножество *различных* чисел вида $a_i + (i-1)$ множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$ всех чисел от единицы до $n + k - 1$. Иными словами, мы сопоставили любому k-мультимножеству над множеством $X = [n]$ вполне определенное k-подмножество множества

$\widetilde{X} = [n+k-1]$. Очевидно, что это сопоставление взаимно-однозначно. Но: количество всех k-подмножеств данного множества мы знаем — оно равно $\binom{n+k-1}{k}$. Следовательно, этому числу равно, по принципу биекции, и количество всех k-мультимножеств над множеством $X = [n]$.

2.4.5. Количество всех k-сочетаний с повторениями над n-множеством X обычно обозначается следующим образом: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Мы, таким образом, доказали, что в случае $X = [n]$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Справедливость этого равенства для произвольного n-множества X следует из принципа биекции.

Упражнения

2.1. Доказать комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

2.2. Доказать комбинаторно тождество Вандермонта

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

2.3. Доказать комбинаторно следующее рекуррентное соотношение для количества k-сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right), \qquad n,k = 1,2,\ldots$$

$$\left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right) = \binom{n}{1} = n; \qquad \left(\!\!\binom{1}{k}\!\!\right) = \binom{k}{k} = 1.$$

2.4. Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right).$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n}.$$

2.5. Используя формулу (8) суммирования по верхнему индексу, получить замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^{k} i, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^2, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^3.$$

2.6. Доказать обобщенное правило суммы для произвольного количества n множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|. \tag{11}$$

3 k-перестановки из n элементов. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам.

3.1. Перейдем теперь к подсчету количества k-перестановок из n элементов, т.е. к подсчету различных *упорядоченных* наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, в которых все a_i принадлежат одному и тому же n-элементному множеству X.

3.1.1. Заметим, прежде всего, что в различной литературе встречается довольно много альтернативных названий для данного объекта. Именно, упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$, также иногда называется

– k-размещением из n элементов;

– кортежем из k элементов множества X;

– упорядоченной k-выборкой из n элементов;

– k-мерным вектором над множеством X;

– k-элементным словом над n-элементным алфавитом.

Элементы a_i в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ могут как повторяться, так и не повторяться. В первом случае говорят о k-перестановках с повторениями, во втором — о k-перестановках без повторений.

Номер паспорта — это типичный пример k-перестановки с повторениями над множеством из десяти цифр $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Классическим примером 3-перестановки без повторений является упорядоченный список спортсменов, занявших призовые места в любых спортивных соревнованиях.

3.1.2. Сосчитаем вначале количество k-перестановок с повторениями.

Утверждение 3.1. *Количество k-перестановок с повторениями из n элементов равно n^k.*

Для доказательства можно либо просто сослаться на правило произведения, либо рассмотреть $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$ как слово из k элементов над алфавитом из $n = |X|$ букв. На первое место в слове мы можем поставить любую из n букв, на второе — также любую из n букв и так далее. Всего же получаем n^k вариантов записать данное слово.

3.1.3. В качестве важного приложения доказанного выше результата сосчитаем еще раз, на этот раз комбинаторно, количество подмножеств данного множества X. Для этого воспользуемся принципом биекции. Именно, закодируем любое подмножество A множества X бинарной строкой $f(A)$ длины n, то есть строкой над алфавитом $\{0, 1\}$. Единицу на i-м месте поставим в случае, если элемент $x_i \in A$. В противном случае на i-е место поставим ноль.

Например, пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_2, x_4\}$. Тогда соответствующая подмножеству A строка длины 4 записывается следующим образом:

$$f(A) = (0, 1, 0, 1).$$

Очевидно, что построенное отображение f взаимно-однозначно. Следовательно, количество подмножеств данного n-множества X совпадает с количеством бинарных строк длины n, которое, согласно доказанному выше утверждению 3.1, равно 2^n.

3.1.4. Перейдем теперь к подсчету количества перестановок без повторений.

Утверждение 3.2. *Количество $P(n,k)$ k-перестановок из n элементов без повторений равно*

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k.$$

Доказательство очевидно — на первое место в строке длины k я могу поставить любой из n элементов, на второе — любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и так далее.

3.1.5. В частном случае $k=n$ k-перестановки из n элементов без повторений называются просто перестановками n-элементного множества X. Их количество равно

$$P_n \equiv P(n) = n!, \qquad P(0) = 0! = 1.$$

3.1.6. Любую k-перестановку из n элементов без повторений можно рассматривать и как упорядоченное k-подмножество n-множества. Мы знаем, что количество всех k-подмножеств n-множества равно $\binom{n}{k}$, а количество способов упорядочить k-подмножество равно количеству перестановок этих k элементов, т.е. $k!$. Следовательно, числа $(n)_k$ и $\binom{n}{k}$ связаны соотношением

$$(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Последняя формула часто используется как некомбинаторное определение биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ в случае, когда $k \in \mathbb{Z}$, а n принадлежит $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{C}$. Именно, по определению,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \dfrac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-k+1)}{k!} =: \dfrac{(q)_k}{k!}, & \text{если } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k < 0, \end{cases} \qquad \forall\, q \in \mathbb{C}.$$

Например,

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = -1.$$

3.1.7. Функцию $(q)_k$ часто также обозначают через $q^{\underline{k}}$ и называют *убывающей факториальной степенью* [?]. Наряду с убывающей можно ввести и так называемую *возрастающую факториальную степень*

$$q^{(k)} \equiv q^{\overline{k}} := q \cdot (q+1) \cdot \ldots \cdot (q+k-1).$$

В частности, с ее помощью получается удобное для вычислений выражение для количества $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{(k)}}{k!}.$$

3.2. Итак, мы получили простые соотношения для подсчета количества четырех основных объектов элементарной комбинаторики — k-сочетаний и k-перестановок из n элементов с повторениями и без повторений. Эти объекты встречаются в огромном количестве внешне не очень похожих друг на друга задач элементарной комбинаторики. Оказывается, однако, что большинство этих задач можно свести к одной из двух простейших схем — либо к так называемой урновой схеме, либо к схеме раскладки предметов по ящикам.

3.2.1. В урновой схеме имеется урна, в которой находятся n *различимых* предметов. Из урны последовательно вытаскивается k предметов. Задача состоит в подсчете количества различных способов выбора этих предметов, или, как еще говорят, в подсчете различных k-элементных выборок из n предметов, находящихся в урне.

На практике наиболее часто встречаются четыре модификации этой задачи, различающиеся способами формирования k-элементной выборки. Прежде всего, мы можем возвращать или не возвращать вытаскиваемые предметы обратно в урну. В первом случае говорят о *выборке с повторениями*, во втором — о *выборке без повторений.* Далее, в некоторых задачах нам важен порядок вытаскиваемых предметов. В этом случае имеем так называемые *упорядоченные* выборки. В противном случае выборки называются *неупорядоченными.*

Нетрудно понять, что задачи о подсчете k-элементных выборок представляют собой, по сути, те же самые задачи о подсчете k-перестановок или k-сочетаний из n элементов. Действительно, любая неупорядоченная k-элементная выборка представляет собой либо k-элементное подмножество n-множества, либо k-мультимножество над n-элементным множеством в зависимости от того, возвращаем мы вытаскиваемые предметы обратно в урну или не возвращаем. Следовательно, количество таких неупорядоченных выборок совпадает с коэффициентами $\binom{n}{k}$ или $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Очевидно также, что любая упорядоченная k-элементная выборка есть просто некоторая k-перестановка n-элементного множества. Поэтому количество таких выборок равно n^k или $(n)_k$ в зависимости от того, говорим ли мы о выборке с повторениями или без повторений.

В результате получаем следующую таблицу решений задач, связанных с урновыми схемами:

Предметы на выходе	с возвращением	без возвращения
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

3.2.2. Приведем несколько характерных примеров, достаточно естественно сводящихся к одной из описанных выше урновых схем.

Пример 3.3. Предположим, что у нас имеется некоторое общество, состоящее из двадцати членов. Сколькими способами можно выбрать президента, вице-президента, секретаря и казначея этого общества?

Решение. Очевидно, что любой способ выбора представляет собой упорядоченное 4-элементное подмножество 20-элементного множества. Следовательно, существует ровно $(20)_4$ различных способов выбора членов общества на эти должности.

Пример 3.4. Для того, чтобы открыть сейф, нужно набрать код из пяти символов с помощью вращающихся дисков. На каждом из этих дисков нанесено 12 символов, одинаковых для каждого из дисков. Сколько вариантов различных кодов существует?

Решение. Любой код представляет собой упорядоченную 5-элементную выборку с повторениями или, иначе, строку из пяти символов над алфавитом из 12 букв. Следовательно, имеется 12^5 вариантов различных кодов.

Пример 3.5. На почте продаются открытки десяти различных видов. Сколькими способами можно купить восемь открыток? А восемь открыток разных видов?

Решение. Понятно, что в первом случае любой набор из восьми открыток представляет собой неупорядоченную выборкус повторениями, а во втором — выборку без повторений из 10 элементов. Следовательно, в первом случае имеем $\left(\!\binom{10}{8}\!\right)$, а во втором — $\binom{10}{8}$ способов покупки восьми открыток.

3.2.3. Второй, не менее популярной в элементарной комбинаторике схемой, связанной с подсчетом количества k-перестановок и k-сочетаний, является схема раскладки предметов по ящикам. В этой схеме имеется n *различимых* ящиков, по которым нужно разложить k *различимых* или *неразличимых* предметов. При этом мы можем накладывать определенные ограничения на количество предметов в каждом ящике.

Рассмотрим, к примеру, задачу о подсчете количества способов раскладки k различимых предметов по n различимым ящикам при условии, что в любой ящик можно класть любое количество предметов. Количество способов совершить эти действия равно, очевидно, n^k. Действительно, любой предмет мы можем положить в любой из n ящиков вне зависимости от того, куда мы положили оставшиеся предметы. Поэтому, согласно правилу произведения, это количество равно n^k. Иными словами, данная задача представляет собой переформулировку задачи о подсчете количества k-перестановок из n элементов с повторениями.

Теперь предположим, что в той же схеме мы не имеем права класть более одного предмета в один ящик. Тогда первый предмет мы можем поместить в любой из n ящиков, второй — в любой из оставшихся свободными $(n-1)$ ящиков и так далее. Всего же получаем $(n)_k$ способов раскладки. Следовательно, данная схема соответствует подсчету k-перестановок без повторений.

3.2.4. Пусть теперь у нас имеются n различимых ящиков и k неразличимых предметов. Тогда подсчет количества различных способов раскладки этих предметов по ящикам сводится к задаче о подсчете количества k-сочетаний из n элементов.

Действительно, в данной схеме в качестве n-элементного множества выступает множество, состоящее из n различимых ящиков. В случае, когда в каждый ящик можно класть не более одного предмета, мы, раскладывая предметы по ящикам, выделяем в этом множестве некоторое k-элементное подмножество. Следовательно, количество таких раскладок совпадает с количеством различных k-элементных подмножеств n-множества и равно $\binom{n}{k}$.

В случае же, когда никаких ограничений на количество предметов в ящике не накладывается, мы, раскладывая по ящикам k неразличимых предметов, задаем тем самым некоторое k-мультимножество n-множества X. Поэтому количество различных способов такой раскладки равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ k-сочетаний из n элементов с повторениями.

Подводя итоги, построим таблицу рассмотренных схем раскладок n предметов по k ящикам:

Предметы	Ящики	Произвольное количество предметов в ящике	Не более одного предмета в ящике
различимые	различимые	n^k	$(n)_k$
неразличимые	различимые	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

3.2.5. Проиллюстрируем некоторые характерные примеры задач, которые довольно естественно сводятся к схеме схем раскладки предметов по ящикам.

Пример 3.6. Сколькими способами можно разложить по двум *различимым* карманам (например, левому и правому) девять монет *различного* достоинства?

Решение. Рассматриваемый пример является типичной задачей, которая естественным образом сводится к схеме раскладки предметов по ящикам. Действительно, в роли ящиков здесь выступают левый и правый карман, а в роли предметов — девять различных монет. Поэтому ответ в этой задаче — 2^9 способов.

Замечание 3.7. Рассмотренная задача, однако, не всегда решается верно: в качестве ответа иногда выдают 9^2 способов. Путаница, как правило, происходит потому, что эту задачу пытаются свести к урновой схеме, считая, что имеются урна, в которой расположены 9 различных предметов, а также 2 различимые позиции на выходе.

Для того, чтобы этой путаницы избежать, полезно сформулировать следующие основные отличия схемы раскладки по ящикам от соответствующей ей урновой схемы. Во-первых, в схеме раскладки предметов по ящикам предметы обратно не возвращаются, они остаются в ящике. Во-вторых, в этой схеме в любой ящик можно класть любое количество предметов. В аналогичной урновой схеме на любую позицию помещается ровно один предмет.

Приведем теперь два характерных примера, связанных с раскладкой неразличимых предметов по различимым ящикам.

Пример 3.8. У отца имеется 5 (неразличимых) апельсинов, которые он может раздать восьми своим сыновьям. Если его задача состоит в том, чтобы раздать их максимальному количеству сыновей, то он должен поставить дополнительное условие — любой из его сыновей не должен получить более одного апельсина. В этом случае количество способов, которыми он может раздать своим сыновьям эти пять апельсинов, равно, очевидно, $\binom{8}{5}$. Если же он раздает их по каким-то заслугам, и может, таким образом, любому сыну отдать любое количество апельсинов, то количество способов это сделать равно $\left(\!\binom{8}{5}\!\right) = \binom{12}{5}$.

Пример 3.9. В физике встречаются задачи, в которых имеются n различных уровней энергии и k неразличимых элементарных частиц. Если эти частицы — фермионы, то для них действует так называемый принцип запрета Паули, согласно которому на любом энергетическом уровне может находиться не более одной элементарной частицы. Как следствие, количество различных распределений k фермионов по n энергетическим уровням равно $\binom{n}{k}$. Наряду с фермионами существуют и частицы иного сорта — бозоны, для которых не существует ограничений на количество частиц, занимающих один и тот же уровень энергии. Для бозонов количество таких распределений равно, очевидно, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

3.2.6. К задачам раскладки неразличимых предметов по различимым ящикам, связанным с подсчетом количества k-сочетаний, сводятся также задачи о так называемом *разбиении* натурального числа k на n слагаемых. Данная задача формулируется следующим образом: сколькими способами можно представить натуральное число k в виде суммы n слагаемых вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$$

при условии, что порядок слагаемых важен, то есть при условии, что разбиения вида

$$1 + 3 + 3 + 3 = 10 \qquad \text{и} \qquad 3 + 1 + 3 + 3 = 10$$

считаются различными?

Если на числа a_i накладывается единственное условие вида $a_i \geqslant 0$, то количество разбиений равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ k-мультимножеств над n-элементным множеством. Действительно, в упорядоченной сумме $a_1+a_2+\ldots+a_n$ любой индекс i слагаемого a_i можно рассматривать как i-й ящик, в который мы складываем a_i единиц. Следовательно, эту задачу можно трактовать как задачу о раскладке k "неразличимых" единиц по n различимым ящикам.

Пример 3.10. Подсчитать количество разбиений числа $k = 4$ на два слагаемых:

$$a_1 + a_2 = 4, \qquad a_1, a_2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(\!\binom{2}{4}\!\right) = \binom{5}{4} = 5$ разбиений: $0 + 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4 + 0 = 4.$

К подсчету числа k-сочетаний из n элементов без повторений задача о разбиении числа k сводится в случае, когда на числа a_i накладываются следующие условия:

$$a_i = 0 \qquad \text{или} \qquad a_i = 1.$$

В этом случае индекс i также можно трактовать как i-й ящик; его можно выбрать (положив $a_i = 1$) или не выбрать (положив $a_i = 0$). Всего же нужно выбрать k таких ящиков. Это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

Пример 3.11. Подсчитать количество разбиений числа 2 на три слагаемых при условии, что любое слагаемое может принимать значения 0 или 1.

Ответ: $\binom{3}{2} = 3$ разбиения: $1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1 = 2.$

3.2.7. Достаточно часто на практике встречаются ситуации, когда одну и ту же задачу можно свести и к урновой схеме, и к схеме раскладки предметов по ящикам.

Пример 3.12. В кондитерском магазине продаются пирожные трех разных видов. Сколькими различными способами можно купить семь пирожных?

Решение. Ответ в этой задаче, очевидно, равен $\left(\!\binom{3}{7}\!\right) = \binom{9}{7}$. Этот ответ можно, например, получить, представляя себе коробку с тремя отделениями, в каждое из которых кладется пирожное только одного вида; в этом случае мы сводим задачу к подсчету количества раскладок семи неразличимых предметов по трем различимым ящикам. Другой способ получить тот же ответ — это представлять себе урну, в которой находятся три разных пирожных, и считать количество способов выбора из урны семи пирожных с возвращениями любого выбранного пирожного обратно в урну. Наконец, можно вообще забыть о любых схемах, если понимать, что любые семь купленных пирожных трех различных видов представляют собой 7-мультимножество над 3-элементным множеством различных видов пирожных.

Упражнения

3.1. Дать комбинаторное доказательство следующих рекуррентных соотношений для чисел $P(n,k)$:

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k\,P(n-1,k-1), \qquad n \geqslant 1, \quad k = 1,\dots,n;$$

$$P(n,0) = 1, \quad n = 0,1,2,\dots; \qquad P(n,k) = 0, \quad k > n.$$

3.2. На перекрестке имеется 6 светофоров. Сколько существует различных состояний этих светофоров, если каждый из них независимо от других имеет три возможных состояния — горит красный, горит желтый или горит зеленый?

3.3. В купе поезда едет 6 человек. Поезд делает 5 остановок. Сколькими способами пассажиры могут распределиться между этими остановками?

3.4. Сосчитать количество способов раскладки k неразличимых предметов по n различимым ящикам при условии, что в каждом ящике должен находиться как минимум один предмет.

3.5. Подсчитать количество разбиений числа k при ограничениях

$$a_i \geqslant s_i, \quad i = 1,\dots,n; \qquad\qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n =: s \leqslant k.$$