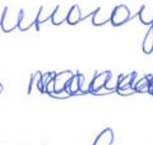
Перечисление „~~...~~ объектов, обладающих симметрией (в частности, непомеченных объектов). Лемма Бернсайда. Th Пойа.

①. Лемма Бернсайда.

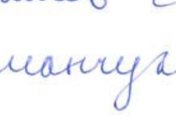
1. Обычно задача подсчета непомеченных объектов (например, графов, деревьев, ...) является более сложной по сравнению с аналогичной задачей перечисления ~~для~~ помеченных объектов. Связано это, прежде всего, с тем что при подсчете таких объектов нужно учитывать некоторую внутреннюю симметрию перечисляемых объектов.

Пример (Лондо). Мы умеем вычислять кол-во триангуляций правильных многоугольников с помеченными вершинами — кол-во триангуляций таких $(n+2)$-угольников = числу Каталана C_n.

Так, для $n=2$:

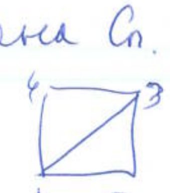


и



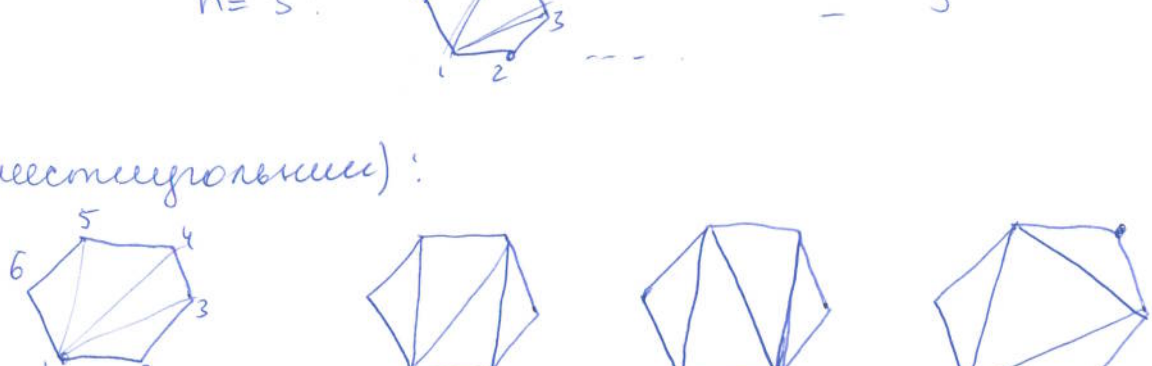
— имеются 2 различных триангуляции

$n=3$:



— 5

$n=4$: (шестиугольник):



6 штук   3 штуки   3 штуки   2 штуки $= 14$ различных триангул. (рис. 1)

Если же рассмотреть непомеченные многоугольники, то в силу их симметричности кол-во различных триангуляций, ~~как говорят, геометрически различных~~ таких объектов уменьшается. Так, всего в случае ~~...~~ 4, имеется всего 1 триангуляция ~~...~~ 1 объект при $n=2$, и $n=3$, и ~~всего~~ 3 объекта ~~...~~ а в случае $n=4$ — 3 или 4 в зависимости

Так
если мы допускаем только вращения - то имеются 4 различных триангуляции; если же еще допускаем и отражения - то всего 3.

Так вот, получение кол-ва таких триангуляций для непомеченных многоугольников при произвольном n - задача значительно более сложная. Наша основная цель - построить общую теорию решения такого рода задач.

---

2. С формальной точки зрения $\forall$ непомеченный объект можно рассматривать как ~~класс~~ некоторый класс эквивалентности на мн-ве всех помеченных объектов данного типа. ~~Конкретно,~~ При этом отношение эквивалентности на этом множестве X, как правило, индуцировано действием некоторой группы G на X.

О чем идет речь?

1) <u>Определение</u> $\exists$ X - некоторое мн-во, $(G, \cdot)$ - группа с бинарной операцией "$\cdot$". (Левым) действием группы G на мн-ве X наз. бинарный оператор

$$\circ : G \times X \longrightarrow X,$$

удовлетворяющий следующим 2-м аксиомам:

1) Ассоциативность:

$$(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G, \ \forall x \in X.$$

2) Тождественность:

$$e \circ x = x \quad \forall x \in X,$$ где e - нейтральный элемент группы G.

---

2) <u>Замечание</u> Из определения следует, что при $\forall$ фиксированном $g \in G$ оператор $\circ$ задает некоторое <u>биективное</u> отображение $\circ : X \to X$, сопоставляя

любому $x \in X$ <u>единственный</u> элемент $y \in X$ с.о.:

$$y = g \circ x.$$

Биективность этого отобр-ия следует из того факта, что для $\forall$ такого отобр-ия (задаваемого этим $g \in G$) $\exists$ единственное обратное ему (задаваемое этим $g^{-1} \in G$), сопоставляющее $y \longmapsto$ элемент $g^{-1} \circ y = x$.

<u>Но</u>: $\forall$ биективное отобр-ие ~~некоторого~~ конечного мн-ва в себя можно трактовать как некоторую перестановку σ мн-ва X, т.е. как некоторый элемент симметрической группы $S_{|X|}$ всех перестановок этого мн-ва $X \Rightarrow$ если G действует на X, то
т.е. $\forall g \in G$: отвечает некот. перестановка $\sigma \in S_{|X|}$

$\Rightarrow$ Действие группы G на мн-ве X можно рассматривать как некий гомоморфизм группы G в некоторую подгруппу симметрической группы $S_{|X|}$ – т.н. <u>группу перестановок</u> мн-ва X.

---

3) Рассмотрим некоторые <u>примеры</u>.

а) Тривиальное действие: для $\forall x \in X$, $\forall g \in G$

$$g \circ x = x.$$

Это соотв-вует гомоморфизму группы G в подгруппу $\{e\} \subset S_{|X|}$, состоящую из единственного нейтрального эл-та.
Отсюда, кстати, ~~Из этого примера хорошо~~ видно, что различные эл-ты $g \in G$ не обязаны соотв-вовать <u>различным</u> перестановкам мн-ва X, т.е. это, в общем случае, <u>гомоморфизм</u>, а не изоморфизм G на некот. подгруппу группы $S_{|X|}$.

Но: это – скорее исключение, чем правило. На практике, как правило, мы имеем изоморфизм G в некот. <u>подгруппу</u> группы $S_{|X|}$.

б) Действия группы G на самой себе:

(1): левое действие: $g \circ x = g \cdot x$ $\forall g \in G$, $\forall x \in G$

(2): сопряжение: $g \circ x = g \cdot x \cdot g^{-1}$ $\forall g \in G$, $\forall x \in G$

Будет <u>пример</u>: C_n действует на S_n в задаче о хороводе

в) Группа симметрий многогранника, т.е.

группа (всех) движений евклидова пр-ва, переводящих многогранник в себя — она действует на мн-ве вершин (vertices), рёбер (edges) и граней (faces) этого многогранника. ($\Rightarrow$ будут 3 разных гом-зма: $D_n \to$ мн-во вершин, $D_n \to$ мн-во рёбер, $D_n \to$ мн-во граней $\Rightarrow$ 3 различных $Z(D_n)$)

Вообще, Группа симметрий $\forall$ геометрического объекта действует на мн-ве точек этого объекта.

г) Группа автоморфизмов графа действует на мн-ве его вершин.

4) Оказывается, $\forall$ действие G на X порождает на этом мн-ве X отношение эквивалентности с.о.:

$$x \sim y \text{, если } \exists g \in G: \ g \circ x = y.$$

Докажем это.

а) Рефлексивность: $x \sim x$ для $\forall x \in X$, т.к. для $\forall x \in X$ $\exists e \in G$ — нейтральный элемент: $e \circ x = x$.

б) Симметричность: если $x \sim y$, т.е. $\exists g \in G: g \circ x = y$, то и $y \sim x$: $\exists h = g^{-1} \in G: \ h \circ y = x$.

в) Транзитивность: если $x \sim y$, т.е. $\exists g \in G: g \circ x = y$, и если $y \sim z$, т.е. $\exists h \in G: h \circ y = z$, то $\exists \ h \cdot g \in G: (h \cdot g) \circ x = z$, т.е. $x \sim z$.

5) Как следствие, мн-во X с пом. этого отношения разбивается на попарно непересекающиеся подмн-ва — классы эквивалентности, которые в данном случае наз. орбитами (эл-та $x \in X$ под действием группы G):

для $\forall x \in X$ $\quad Gx := \{ g \circ x \in X \mid g \in G \} \subseteq X.$

мн-во образов эл-та $x \in X$ под действием всей группы G

Соответствующее фактор-мн-во, т.е. мн-во всех таких орбит, обозначается обычно X/G

3. С точки зрения комбинаторики интерес представляет поиск числа орбит, т.е. нахождение мощности описанного выше фактор-мн-ва. Так, если X - это мн-во всех помеченных объектов, то X/G - это мн-во непомеченных объектов, и обычно хочется, зная, например, $|X|$, сосчитать $|X/G|$.

В простейших случаях это делается довольно легко.

1) Пример 1 Хоровод: $\exists$ 6 девушек водят хоровод; сколько $\exists$ различных способов его образовать?

Эквивалентная задача: ожерелье: сколько $\exists$ различных ожерелий, состоящих из 6-ти камней 6-ти же различных цветов?

а) Если бы девушки стояли неподвижно: тогда $\exists$-ло бы $6!$ способов расставить их по местам на окружности, т.е. $X = S_6$ - мн-ву всех перестановок из 6-ти эл-тов; $|X| = 6!$

б) Но: девушки в хороводе ходят по кругу, т.е. их расположение относительно окружающих их предметов не существенно: важно лишь их взаимное расположение друг относительно друга. Как следствие, $\forall$ начальные размещения девушек, переходящие в себя при вращениях, следует считать эквивалентными, т.е. не различать.

в) С формальной т. зрения это означает, что на мн-ве $X = S_6$ всех перестановок 6-ти эл-тов действует группа $G = C_6$ вращений, и нас интересует количество орбит эл-тов мн-ва X под действием группы G, т.е. мощность фактор-мн-ва $|X/G|$.

г) Упрощающим фактом в данной ситуации является то, что количество элементов в $\forall$ орбите оказывается одинаковым и равным порядку $|G|$ групп т.е. шести.
Действительно, ~~для~~ $\forall$ начальной расстановке девушек в хороводе можно сопоставить некоторую перестановку $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)$ шести различных чисел $1, 2, \ldots, 6$. В результате действия группы $G = C_6$ мы из $\forall$ такой перестановки получаем еще 5 <u>различных</u> перестановок вида $(i_2 i_3 \ldots i_6 i_1) \neq (i_3 i_4 \ldots i_6 i_1 i_2) \neq \ldots \neq (i_6 i_1 i_2 \ldots i_5)$.
Поэтому $|Gx| = 6$ для $\forall x \in X$ и мы имеем простую следующую ф-лу для подсчета кол-ва всех орбит: $|X/G| = \frac{|X|}{|Gx|} = \frac{6!}{6} = 5!$

---

2) <u>Пример 2</u> - браслет из 6-ти бусинок 6-ти различных цветов. Отличие от предыдущего примера: браслет мы можем переворачивать, а ожерелье - нет.

а) Единственное отличие от предыдущего примера состоит в том, что теперь на мн-ве $X = S_6$ действует группа $G = D_6$ симметрий правильного шестиугольника, $|G| = 2 \cdot 6 = 12$.

б) Все остальные рассуждения остаются в силе
$\Rightarrow \quad |X/G| = |X|/|G| = 6!/2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

---

3) Более сложный <u>пример 3</u>: подсчитать кол-во <u>геометрически различных</u> способов раскраски 6-ти граней куба в 6 различных цветов.

а) „Геометрически различных": Возьмем 2 одинаковых кубика, как-то раскрасим грани каждого в 6 различных цветов, положим кубики в мешок и в этом мешке их перемешаем. Если в результате этих операций мы не сможем отличить один кубик от другого, то говорят, что способы их раскраски геометрически одинаковы.

б) Теперь, как и в $2^х$ предыдущих примерах, мн-во X раскраски $6^{ти}$ граней кубика в 6 различных цветов (можно вз-одн. сопоставить) мн-во S_6 всех перестановок 6-ти эл-тов. Но: теперь на этом мн-ве действует группа G симметрий куба. Далее, как и в $2^х$ предыдущих примерах, и ровно по тем же соображениям, кол-во эл-тов в $\forall$ орбите одинаково и $=$ порядку $|G|$ группы. Однако в данном случае легче даже сосчитать не порядок $|G|$ группы, а кол-во эл-тов в $\forall$ орбите.

в) Действительно, $\forall$ грань, окрашенную в один из 6 цветов, можно либо оставить на месте, либо перевести в $\forall$ из оставшихся 5-ти граней $\Rightarrow$ всего имеем 6 вариантов. При этом, для $\forall$ из этих вар-тов: $\exists$ 4 различные окраски граней, прилегающих к данной, получающиеся друг из друга поворотами относит. оси, проходящей через центр выбранной грани и центр грани, противоположной ей $\Rightarrow |Gx| = 6 \cdot 4 = 24 \Rightarrow |X/G| = \frac{6!}{24} = 30$

4) Однако нам (в теории Редфилда-Пойа) далее понадобится более детальное описание группы симметрии куба $\Rightarrow$ давайте здесь это описание и проведем. Заодно мы (при гом-изме $G \to S_6$,) вычислим и цикловой индекс $Z(G)$, а точнее цикловой индекс подгруппы группы S_6 перестановок 6-ти эатов, являющейся образом G при гом-изме G в S_6.

а) Как и в $\forall$ группе, в G $\exists$ нейтральный элемент; этому эту $e \in G$ в S_6 соотв-вует перестановка вида $(1)(2)\ldots(6)$, дающая слагаемое a_1^6 в цикловой индекс $Z(G)$ группы G:

$$e \longleftrightarrow a_1^6$$ (т.е. цикловой тип тождественной перестановки $= a_1^6$)

б) Теперь, в G имеется $3 \cdot 2 = 6$ вращений куба относительно трех осей, проходящих через центры противоположных граней, на $90°$: 3 вращения по часовой стрелке и 3 – против часовой стрелки. Цикловой тип всех этих перестановок равен

$a_1^2 a_4^1$ $\Rightarrow$ имеем слагаемое $6 a_1^2 a_4^1$ в $Z(G)$, отвечающее этим вращениям.

в) Далее, имеются также 3 вращения на $180°$ относит. этих осей; им отвечает слагаемое в $Z(G)$

$$3 \cdot a_1^2 \cdot a_2^2$$

г) Кроме того, в G элементы, отвечающие вращению куба относительно 4-х осей, проходящих через противоположные вершины куба, для $\forall$ пары вершин имеются 2 вращения – на $120°$ и $240°$ $\Rightarrow$ всего 8 вращений; им отвечает слагаемое в $Z(G)$ вида $8 \cdot a_3^2$.

д) Наконец, имеются также вращения на 180° относительно осей, проходящих через центры противоположных ребер куба; таких осей 6 штук $\Rightarrow$ 6 вращений, ~~дающих~~ отвечающих 6-ти слагаемым вида a_2^3 ⇒ $6a_2^3$ в $Z(G)$.

е) Т.о. окончательно

$$Z(G) = \left(a_1^6 + 6a_1^2a_4 + 3a_1^2a_2^2 + 6a_3^2 + 6a_2^3\right)\frac{1}{|G|},$$

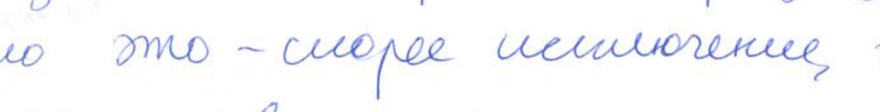
$$|G| = Z(1,\dots,1) = 1+6+3+6+6 = 24.$$

---

4. Итак, во всех разобранных примерах кол-во эл-тов $x \in X$, принадлежащих $\forall$ орбите Gx, было одинаково и равно порядку $|G|$ группы G. Однако это — скорее исключение, чем правило: в большинстве содержательных перечислительных задач кол-во эл-тов в различных орбитах различно.

1) Пример 4. Найти количество геометрически различных способов раскраски вершин Δ-ка в ≤ 2 цвета (не более чем)!

а) Ручным перебором несложно получить, что $\exists$ след. 4 геометрически различные способы раскраски:



б) Формально: $\forall$ из 3х вершин м.б. покрашена либо в черный, либо в белый цвет $\Rightarrow |X| = 2^3 = 8$.

Далее, группа G, действующая на X — это группа D_3

делится $\Rightarrow$?

в) Причина этой ~~однозначности~~ неоднозначности в следующем: в данном примере $\exists$ такие $x \in X$, ~~такое для~~ а также такие элты $g_1 \neq g_2$, $g_1, g_2 \in G$, группы G, что имеет место равво

$$g_1 \circ x = g_2 \circ x.$$

Иными словами, $\exists$ такие $x \in X$, образы которых под действием различных элементов группы совпадают. Как следствие, колво элтов в орбите этих элтов $x \in X$ уменьшается $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ колво самих орбит увеличивается.

Ну действительно, $\exists$ x_1 отвечает раскраске всех 3х вершин в белый цвет $\Rightarrow$ очевидно, что

$$\forall g \in G \quad g \circ x_1 = x_1$$

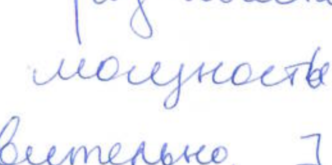
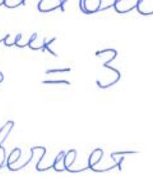
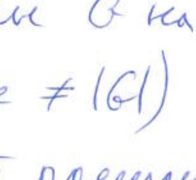
Т.о. орбита этого элта x_1 под действием G состоит из одного единственного элт - его самого: $Gx_1 = \{x_1\}$

Тот же факт выполняется и для элта $x_8 \in X$, отвечающего окраске всех 3х вершин в черный цвет.

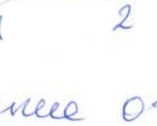
Таким образом, мощности орбит этих 2х элтов

$$|Gx_1| = |Gx_8| = 1.$$

Оставшееся подмнво способов окраски вершин Δ-ка разбивается под действием группы G на 2 орбиты; мощность ~~каждой~~ каждой из них $= 3$ (и также $\neq |G|$)

Действительно, $\exists$ x_2 отвечает следующей раскраске вершин:  , $x_3 \sim$  ; $x_4 \sim$ 

Тогда: отражение относит. оси l_1 ($g_{l_1} \circ x_2$) переводит x_2 в себя:

 (цифры не двигаются, вершины меняются)

То же - относит. вращений $g_{l_2} \circ x_3$, $g_{l_3} \circ x_4$. Далее,

$g_{l_2} \circ x_2 = x_4$, $g_{l_3} \circ x_2 = x_3$, $g_{120^\circ} \circ x_2 = x_3$, $g_{240^\circ} \circ x_2 = x_4 \Rightarrow$

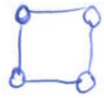
Аналогично с $x_5 \sim$  $x_6 \sim$  $x_7 \sim$  $\Rightarrow$

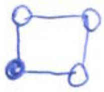
2) Пример 5. Найти кол-во геометрически различных способов раскраски вершин квадрата в 2 цвета.

а) Ручной перебор дает 6 вариантов:

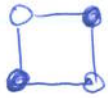
б) Формально: $|X| = 2^4 = 16$; $|G| = |D_4| = 8$; однако кол-во различных вар-тов $\neq 16/8 = 2$, а равно 6.

в) Причина - та же: различное кол-во эл-тов в различных вершинах.

г) Например, $\exists$ $x_1 \sim$  $\Rightarrow |Gx_1| = 1$

$x_2 \sim$  $\Rightarrow |Gx_2| = 4$

$x_3 \sim$  $\Rightarrow |Gx_3| = 4$

$x_4 \sim$  $\Rightarrow |Gx_4| = 2$

3) Итак, подводя итоги:

а) В простейшем случае, когда $|Gx| = |G|$ для $\forall x \in X$, имеем
$$|X/G| = |X|/|G|$$

б) Если же это не так, то
$$|X| \geq |X/G| > |X|/|G|$$

Как же нам искать $|X/G|$? Часто для подсчета кол-ва орбит в этом случае используется т.н. лемма Бернсайда.

5. Прежде всего, введём следующее важное

<u>Опр-ие</u> Стабилизатором $St(x) \equiv G_x$ эл-та $x \in X$ называется мн-во эл-тов <u>группы G</u>, оставляющих x на месте:

$$St(x) \equiv G_x \overset{def}{:=} \{ g \in G \mid g \circ x = x \}.$$

1) Мгновенно проверяется, что это мн-во ~~[illegible]~~ образует ~~собой~~ некоторую <u>подгруппу</u> группы G. Ну действительно,

а) $e \in G_x$: $e \circ x = x$

б) для $\forall g \in G_x$ $g^{-1} \in G_x$: $\exists\ g \circ x = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (g^{-1} \cdot g) \circ x = g^{-1} \circ x \Leftrightarrow x = g^{-1} \circ x.$$

в) $\exists\ g \in G_x,\ h \in G_x \Rightarrow g \cdot h \in G_x$:

$$(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) = g \circ x = x.$$

---

2) Оказывается, имеется тесная связь между орбитами и стабилизаторами. Именно, справедлива следующая

<u>Th</u>. Для $\forall x \in X$ имеется вз.-одн-ое соотв-ие между

(−) мн-вом всех элементов орбиты эл-а x, т.е.

$$Gx = \{ y \in X \mid \exists g \in G : g \circ x = y \}$$

(=) и фактор-мн-вом G/G_x, т.е. мн-вом смежных классов G по стабилизатору G_x, при котором $\forall$ точке $y = g \circ x$ орбиты Gx отвечает некоторый смежный класс $g \cdot G_x$ (т.е. эл-т фактор-мн-ва G/G_x). В частности, если стабилизатор состоит из единственного нейтрального эл-та, т.е. $G_x = \{e\}$, то имеет место вз-одн-ое соотв-вие между всеми эл-тами орбиты Gx и всеми эл-тами группы G.

а) По сути, нам нужно д-ть очень простой факт, а именно, если g_1 и g_2 принадлежат одному и тому же смежному классу, то они переводят x в один и тот же эл-т $y \in X$, и наоборот (т.е. это $\Longleftrightarrow$).

б) А это доказывается элементарно:

$$\text{Пусть } g_2 \in g_1 \cdot G_x \Longleftrightarrow g_1^{-1} \cdot g_2 \in G_x \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (g_1^{-1} \cdot g_2) \circ x = x \Longleftrightarrow g_2 \circ x = g_1 \circ x =: y \in X$$

в) ~~...~~ Как следствие (т.к. везде $\Longleftrightarrow$), различным точкам $y \in Gx$ орбиты отвечают различные смежные классы $\Rightarrow$ имеем вз. одн. соотв-е вида $g \cdot G_x \leftrightarrow g \circ x = y$ для $\forall x \in X$

3) Теперь, известно, что количество элементов в $\forall$ смежном классе одинаково и = кол-ву эл-тов в подгруппе. Действительно,

$$\text{Пусть } g_1, g_2 \in g \cdot G_x, \quad g_1 \neq g_2, \quad \text{то} \ \exists\, h_1 := g^{-1} g_1 \in G_x, \quad h_2 := g^{-1} g_2 \in G_x,$$
$$\Longleftrightarrow g^{-1} \cdot g_1 = h_1 \neq h_2 = g^{-1} g_2 \quad h_1, h_2 \in G_x$$

и, очевидно, $h_1 \neq h_2 \Longleftrightarrow g_1 \neq g_2$ (т.е. сколько различных эл-тов в G_x, столько их и в $g G_x$).

Как следствие, $|G| = |G/G_x| \cdot |G_x|$ ($\Rightarrow$ Th Лагранжа: порядок группы делится на порядок $\forall$ ее подгруппы).

Но: мы доказали взаимно-однозначное соответствие между эл-тами G/G_x и Gx $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |G/G_x| = |Gx| \Rightarrow \boxed{|G| = |Gx| \cdot |G_x|} \text{ для } \forall x \in X.$$

---

4) Теперь мы можем, наконец, сформулировать и д-ть лемму Бернсайда.

<u>Лемма</u>. Зафиксируем некоторый элемент $g \in G$ группы G; пусть X^g — это подмн-во ~~всех~~ всех элементов мн-ва X, остающихся неподвижными под действием этого $g\in G$:

$$X^g :\overset{\text{def}}{=} \{x\in X \mid g\circ x = x\}.$$

Тогда количество орбит, т.е. мощность $|X/G|$ фактор-мн-ва X/G, может быть сосчитано по ф-ле

$$\boxed{|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|}$$

• а) Сосчитаем кол-во всех пар (g,x), $g\in G$, $x\in X$, таких, что $g\circ x = x$. : $|\{(g,x)\in G\times X \mid g\circ x = x\}|$

б) С одной стороны, количество всех таких пар равно $\sum\limits_{g\in G}|X^g|$.

в) С другой стороны, оно, ~~равное~~ по опр-ю стабилизатора G_x эл-та $x\in X$, равно

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x\in X}|G_x| \\ \text{г) Но:}\quad &|G_x| = \frac{|G|}{|Gx|}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\sum_{g\in G}|X^g| = |G|\cdot\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}}$$

д) Теперь: всё мн-во X разбито на $k=|X/G|$ попарно непересек. классов эквивалентности Gx_i, $i=1,\dots,k$ $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in Gx_i}\frac{1}{|Gx_i|} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{|Gx_i|}\sum_{x\in Gx_i}1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{|Gx_i|}{|Gx_i|} = \sum_{i=1}^{k}1 = k = |X/G| \Rightarrow \dots$$ •

---

5) <u>Следствие</u>. Если для $\forall x\in X$ $\exists$ лишь один элемент группы G, оставляющий его неподвижным, а именно, нейтральный эл-т e группы G, то: $|X^e| = |X| \Rightarrow |X/G| = \frac{|X|}{\dots}$

6. Практический смысл леммы Бернсайда состоит в следующем: количество элементов в группе G всегда меньше количества элементов в мн-ве X, на котором эта группа действует. Поэтому, как правило, легче перебрать все элементы $g \in G$ и посмотреть, какие эл-ты $x \in X$ остаются под действием этого эл-та g неподвижными, чем перебирать все $x \in X$ и ~~смотреть~~ считать для каждого такого x кол-во эл-тов в орбите Gx.

Проиллюстрируем это утверждение на примерах.

1) Пример 1 Раскраска вершин правильного Δ-ка в ≤ 2 цвета.

а) $|X| = 2^3 = 8$; $|G| = |D_3| = 6$.

б) Тождественная перестановка (~~цикловой тип a_1^3~~) перестановки в образе $e \in G$ в группу S_3 при действии G на множ. вершин

любой из 2^3 эл-тов мн-ва X остается неподвижным под действием такой перестановки $\Rightarrow |X^e| = 2^3$.

в) Вращения a, b на $120°$ и $240°$ (~~цикловой тип a_3~~): только 2 эл-та мн-ва X остаются неподвижными под действием таких перестановок - эти, отвечающие окраске вершин либо только в черный, либо только в белый цвета $\Rightarrow |X^a| = |X^b| = 2 \Rightarrow$ имеем $2 \cdot 2 = 4$ вар-та

г) Отражения c, d, f относит. осей, прох. через $\forall$ из 3-х вершин и центр противоположного ей ребра (цикловой тип $a_1 \cdot a_2^1$): для $\forall$ такой перестановки: к 2-ум эл-там X, описанным в п. (в), добавляются еще 2 эл-та вида

 и  $\Rightarrow$ имеем $3 \cdot 2 \cdot 2$ вар-та

д) Т.о. окончательно имеем:

$$|X/G| = \frac{1}{6}\left[2^3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 2\right] = \frac{4}{6}\left[2+1+3\right] = 4.$$

е) Замечание 1 Выпишем цикловой индекс группы D_3, действующей на мн-ве $\tilde{X}$ вершин, $|\tilde{X}|=3$:

$$\tilde{Z}(G) = a_1^3 + 2a_3 + 3a_1a_2,$$

а также приведенный цикловой индекс группы

$$Z(G) = \frac{1}{|G|}\tilde{Z}(G) = \frac{1}{6}\left[a_1^3 + 2a_3 + 3a_1a_2\right].$$

Видно, что $|X/G|$ получается подстановкой $a_i = 2$ $\forall i = \overline{1,3}$ в этот приведенный цикловой индекс. Далее мы увидим, что этот результат совсем не случаен.

ж) Замечание 2. А если бы мы рассматривали задачу подсчета ~~различных~~ раскрасок ожерелий из $3^х$ камней в ≤ 2 цвета? В этом случае $G = C_3$,

$$Z(C_3) = \frac{1}{|C_3|}\left[a_1^3 + 2a_3\right]; \quad |X/G| = \frac{1}{3}\left[2^3 + 2\cdot 2\right] = 4$$

з) Пример 2 Найдем кол-во геометрически различных способов окраски вершин квадрата в ≤ 2 цвета.

а) Здесь $|X| = 2^4$; $G = D_4$; $|G| = 8$.

б) Тождественная перестановка (~~тип a_1^4~~): $|X^e| = 2^4$.

в) Повороты на $90°$ влево и на $90°$ вправо (тип a_4) только 2 шт.: и $\Rightarrow 2\cdot 2$.

г) Повороты на $180°$: (~~тип a_2^2~~): еще 2 шт.: и

$\Rightarrow 2\cdot 2^2$.

д) Отражения относит. ~~верх~~ осей, прох. через противоположные вершины (~~тип $a_1^2 a_2$~~): ~~по нашей~~

3) Итак, вообще говоря, при подсчете кол-ва орбит удобно использовать лемму Бернсайда. Однако Пойа (и Редфилд) заметили, что этот подсчет можно упростить для ~~перечн.~~ некоторого (большого) класса задач, — задач о раскраске ~~некот.~~ геом. ~~объектов~~ фигур. Именно, рассмотрим задачи о подсчете кол-ва геометрич. различных способов окраски (элементов) некот. геом. ~~объекта~~ (фигуры) $\bar{X}$, ~~состоящего из~~ $|\bar{X}|=n$ (например, вершин, или ребер, или граней, или $\forall$ других „кирпичиков“ (объектов)) в $\leq k$ цветов. Вообще говоря, нам надо рассматривать действие некоторой группы G (как правило, группы симметрий именно этого геом. объекта $\bar{X}$) на множ-ве X, $|X| = k^n$ всех раскрашенных объектов. Однако, как догадался Пойа, достаточно рассматривать действие G не на X, а на (самом) мн-ве $\bar{X}$, $|\bar{X}|=n$, т.е., например, мн-ве $\bar{X}$ вершин правильного n-угольника. Группа G переводит точки $\bar{X}$ в себя $\Rightarrow$ имеем гомоморфизм G в группу S_n, где $n = |\bar{X}|$.

Как правило, ~~связан~~ с этим геом. объектом естественным образом связана группа G симметрий этого объекта. Она действует на (помеченных) элементах объекта $\bar{X}$, переводя мн-во этих ~~элем.~~ объектов (вершины, грани, ребра, ...) ~~друг в друга~~ в себя. Формально говоря, имеется естественный гомоморфизм группы G симметрий объекта $\bar{X}$ в (симметрич.) группу S_n, $n=|\bar{X}|$; (т.е. всего некот. гомом. G в гр.) перестановок элементов фигуры $\bar{X}$. Образ этой группы при гомоморфизме — это (некоторое подмн-во ~~группы~~ (симметрической группы) S_n) а (именно, группа) перестановок элтов $\bar{X}$, для кот. м.б. подсчитан цикловой индекс $\quad Z_{\tilde X}(G) = \frac{1}{|G|}\sum a_1^{i_1}\dots a_n^{i_n}$,

где $n=|\tilde X|$, $1\cdot i_1+2i_2+\dots+n\cdot i_n=n$; $|G|$ — порядок группы. Кстати, n в этой науке наз. степенью группы G при действии G на $\tilde X$.

~~Так вот~~ В лемме Бернсайда рассматривается действие G на более широком мн-ве X окрашенных (покрашенных) объектов, ($|X|=k^n$), и подсчитывается кол-во орбит элтов X под действием группы G. ~~Оказывается так, что все, что надо~~ Так вот, Пойа и Редфилд поняли, что все, что нужно знать для подсчета кол-ва орбит $|X/G|$ — это цикловой индекс G, действующей на исходном мн-ве $\tilde X$, т.е. на самой геом. фигуре.

Почему? Рассмотрим образ $\sigma\in S_n$, $n=|\tilde X|$ $\forall$ фиксированного элта $g\in G$; ~~...~~ эта перестановка м.б. записана в виде прии нескольких (m) циклов:

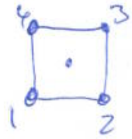
$$(i_1\dots i_{j_1})(i_{j_1+1}\dots i_{j_2})\dots(i_{j_{m-1}}\dots i_n)$$

Теперь заметим, что если ~~все элты $\tilde X$, окрашенные в одинаковый~~, входящие во мн окрасим элты $\tilde X$ так, что все элты $\tilde X$, принадлежащие ~~к~~ данному циклу, будут ~~...~~ окрашены в одинаковый цвет,

Теперь (для $\forall$ цикла j, $j=1,\dots,m$, сделаем следующее:) окрасим все эл-ты, входящие в данный цикл j, $j=1,\dots,m$, в одинаковый цвет ($\forall$ из k цветов). Тогда: ~~...~~ окрашенные таким образом (геом. фигура) ~~элементы~~ мн-ва X) останутся неподвижными под действием элта $g\in G$. Очевидно, что верно и обратное: если элт $x\in X$ остался неподвижным под действием эл-та $g \in G$, то все его эл-ты (напр. вершины), входящие в один и тот же цикл, должны быть окрашены в один и тот же цвет.

Пример: Рассмотрим квадрат, вершины кот. м.б. окрашены в ≤ 2 цвета.

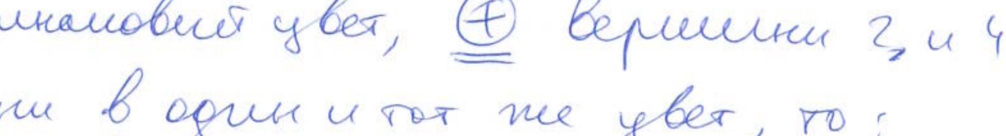
а) $\exists\, g \in D_4$ – это вращение квадрата на $180°$; образ этого



эл-та при гом-изме $G \to S_4$ есть $\sigma_g = (13)(24)$

б) Теперь: если вершины 1 и 3 ~~а также~~ будут окрашены в одинаковый цвет, $\oplus$ вершины 2 и 4 будут окрашены в один и тот же цвет, то:
$\forall$ квадрат, чьи вершины будут окрашены таким образом, перейдет в себя под действием эл-та $g \in G$:

в) Например,



все такие квадраты перейдут в себя при вращении квадрата на $180°$.

г) А сколько всего таких квадратов? $\forall$ из 2-х циклов м.б. окрашен в $\forall$ из 2-х возможных цветов $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ имеем $2 \cdot 2 = 4$ различных эл-та X, остающихся неподвижными под действием $g \in G$.

То же самое мы имеем и в общем случае, а именно: если у нас перестановка $\sigma_g \in S_n$ содержит m циклов, то: $\forall$ из циклов м.б. окрашен в $\forall$ из k цветов $\Rightarrow$ имеем k^m эл-тов мн-ва X, остающихся неподвижными под действием эл-та $g \in G$.

4) Итак, основная догадка, сделанная Пойа, состоит, по-видимому, в следующем: нам не надо рассматривать действие группы G на всем мн-ве X - мн-ве помеченных объектов, или мн-ве окрашенных вершин и т.д. (например, $|X| = 2^3$ в задаче об окраске вершин правильного Δ-ка). Достаточно взять мн-во $\tilde{X}$, $|\tilde{X}| = n$, неокрашенных объектов и рассмотреть действие G на этом мн-ве $\tilde{X}$.

Но: в цикловом индексе $Z_{\tilde{X}}(G)$ как раз и собрана информация о цикловой структуре $\forall$ перестановки $\sigma_g \in S_n$, $g \in G$, $n = |\tilde{X}| \Rightarrow$

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{|G|} \sum K^{i_1 + \ldots + i_n},$$ т.к.

$\forall g \in G \quad |X^g| = K^m$, где m - кол-во циклов в перестановке $\sigma_g \in S_n$.

Пример: окраска вершин квадрата в ≤ 2 цвета

а) Цикловой тип:

$$Z_{\tilde{X}}(D_4) = \frac{1}{|D_4|}\left[a_1^4 + 2a_4 + a_2^2 + 2a_1^2 a_2 + 2a_2^2\right]$$

б) Тогда: $|X/D_4| = \frac{1}{|D_4|} \cdot \left[2^4 + 2 \cdot 2 + 2^2 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2\right] = 6$.

Именно на этом замечательном наблюдении Рэдфилд (1927) и, независимо от него, Пойа* (1937) построили свою теорию перечисления непомеченных объектов. При этом работа Рэдфилда долгое время оставалась незамеченной, тогда как на работу Пойа* сразу обратили внимание. Более того, Пойа* очень удачно обобщил теорию на случай объектов с разными весами. В результате теория перечисления Пойа стала одним из наиболее мощных инструментов современной перечислительной комбинаторики. К ее изучению мы и перейдем в следующих §-фах.

---

(2). Теория перечисления Пойа*

1. Прежде всего, давайте ответим на следующий вопрос: а как формализовать понятие раскраски граней куба или вершин квадрата?

1) Пойа* предложил следующий, довольно естественный, способ формализации этих понятий. ∃ имеется некот. геом. фигура Г (некот. геом. объект) и Пусть $\tilde{X}$ – это некоторое конечное ($|X|=n$) помеченных эл-тов геом. фигуры, кот. мы будем раскрашивать мн-во – мн-во вершин n-угольника, мн-во граней куба, и т.д. Далее, ∃ Y – это некоторое конечное ($|Y|=k$) мн-во цветов. Тогда ∀ отобр-е

$$f: \tilde{X} \to Y$$

задает нам некоторую окраску эл-тов мн-ва $\tilde{X}$ цветами из мн-ва Y. При этом мн-во X всех помеченных эл-тов Г, окрашенных в ≤k цветов, – это мн-во $Y^{\tilde{X}}$ всех отобр-ий

$f: \tilde{X} \to Y$; $|X| = |Y|^{|\tilde{X}|}$