

Задание 7 (на 19.10).

ML 33. Покажите, что универсальный предикат для класса одноместных разрешимых предикатов не является разрешимым.

ML 34. Докажите, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

- а) x^y ;
- б) $x!$;
- в) Покажите, что усеченное вычитание $x \dot{-} y$, которое равняется $x - y$, если $x \geq y$ и нулю иначе, является примитивно рекурсивным;
- г) $\min(x, y)$;
- д) $\max(x, y)$;

Множество $S \subseteq \mathcal{N}^k$ называется примитивно рекурсивным, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна.

ML 35.

- а) Покажите, что множество $S \subseteq \mathcal{N}^k$ примитивно рекурсивное, тогда и только тогда, когда оно есть множество нулей некоторой примитивно-рекурсивной функции;
- б) покажите, что объединение, пересечение и дополнение примитивно рекурсивных множеств является примитивно рекурсивным.
- в) покажите, что предикат $x = y$ примитивно рекурсивен;
- г) покажите, что предикат $x > y$ примитивно рекурсивен.

ML 36. Пусть отношение $R(x, y)$ задает примитивно рекурсивное множество (т.е. множество $\{(x, y) \mid R(x, y) = 1\}$), докажите, что отношения $S(x, z) = \exists(y \leq z)R(x, y)$ и $T(x, z) = \forall(y \leq z)R(x, y)$ также задают примитивно рекурсивные множества.

ML 37. Докажите, что существует такое подмножество натуральных чисел, что его симметрическая разность с любым перечислимым множеством имеет бесконечный размер.

ML 21. Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\begin{smallmatrix} s_1 \\ t_1 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} s_n \\ t_n \end{smallmatrix} \right], s_i$ и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 31. Обозначим через $K(x)$ минимальное такое число n , что алгоритм с номером n (номер алгоритма — это номер его текста, при этом строчки упорядочиваются сначала по длине, потом по алфавиту) на входе 0 входе печатает x и останавливается. Докажите, что $K(x)$ не является вычислимой функцией.

ML 32. Пусть предикат $A(n, x)$ обладает таким свойством: для любого разрешимого предиката $R(x)$ найдется такое натуральное число r , что $A(r, x) = R(x)$ для всех x . Покажите, что предикат A не разрешим.