

1. (1) Сходится ли $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$ абсолютно?
2. (2) Пусть f непрерывная на $[0; +\infty)$, такая что существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \int_0^x f(t) dt \right).$$

Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. (2) Для $\alpha > 0$ исследуйте сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \ln^\alpha x \frac{\sin x}{x} dx$.

4. (2) Докажите $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi\alpha/2)}, |\alpha| < 1$.

5. (2) Докажите

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a},$$

где $a > 0, b > 0, f(x)$ – непрерывная на $[0; +\infty)$ функция, такая, что $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ существует.

6. (1) Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$

7. (2) Исследуйте на абсолютную и условную $\int_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha \sin x^3 dx$.