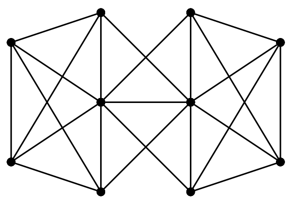
Вершинная и реберная связность графа

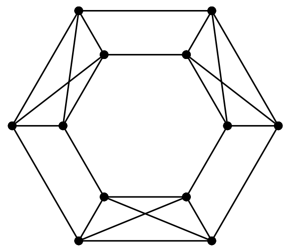
Практика

13 октября 2017 г.

1. (0.5 балла). Доказать, что $\kappa(G) < n - 1$ для всех графов G, отличных от K_n.
2. (0.5 балла). Доказать, что у k-связного графа, построенного на n вершинах, количество m ребер больше или равно $kn/2$.
3. (1 балл). Привести пример графа G с $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$, $\delta(G) = 4$.
4. (1.5 балла). Пусть у нас задана тройка натуральных чисел $\kappa < \lambda < \delta$. Привести алгоритм построения графа G, у которого $\kappa(G) = \kappa$, $\lambda(G) = \lambda$, а $\delta(G) = \delta$.



(a)



(b)

Рис. 1

5. (0.5 балла). Определить значение $\kappa(G)$ для графа, представленного на рис.1,a.
6. (1 балл). Определить значения $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ и $\delta(G)$ для графа, показанного на рис.1,b.
7. (1.5 балла). Доказать, что для любого простого графа G с $\Delta(G) \leqslant 3$ реберная и вершинная связность совпадают. Что можно сказать о $\kappa(G)$ и $\lambda(G)$ в случае простого 3-регулярного графа?
8. (1.5 балла). Построить наименьшие по количеству вершин 3-регулярные графы G_2 и G_3, для которых $\kappa(G_2) = 2$, $\kappa(G_3) = 3$.
9. (2 балла). Построить наименьший 3-регулярный граф G, для которого $\kappa(G) = 1$. Доказать, что построенный граф действительно является минимальным.
10. (2 балла). Возьмем четное количество n вершин и расставим их равномерно по кругу. Зафиксируем некоторое четное натуральное число $k < n$ и проведем из любой вершины k ребер, соединив эту вершину с $k/2$ вершинами слева по кругу от нее и с $k/2$ вершинами справа по кругу от нее. В результате получим k-регулярный граф, построенный на n вершинах. Доказать, что для такого графа $\kappa(G) = k$.

11. (2 балла). Модифицировать описанный в предыдущем упражнении алгоритм построения графа с $\kappa(G) = k$ для случая нечетного k и четного n, а также для случая, когда оба эти параметра нечетные. Доказать, что и в этом случае связность полученных графов равна k.

12. (1.5 балла). Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geqslant n-2$, где n — количество вершин в графе. Доказать, что в этом случае $\kappa(G) = \delta(G)$. Предъявить для любого $n > 3$ граф с $\delta(G) = n-3$, у которого $\kappa(G) < \delta(G)$.

13. (1.5 балла). Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geqslant (n+k-2)/2$, где n — количество вершин в графе, $n \geqslant k+1$. Доказать, что в этом случае G является k-связным графом, то есть что $\kappa(G) \geqslant k$.