Список вопросов к экзамену по математическому анализу
АУ, четвертый семестр, весна 2018 года
предварительная версия

Глава XIII. Теория функций комплексного переменного

1. Голоморфные функции. Свойства. Связь f' с частными производными. Вещественная и комплексная линейность. Условия Коши–Римана. Частные производные $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Функции с постоянной вещественной частью.

2. Два доказательства теоремы Коши о дифференциальной форме $f(z)\,dz$.

3. Следствие из теоремы Коши. Модификация теоремы Коши о дифференциальной форме $f(z)\,dz$.

4. Индекс кривой относительно точки. Интегральная формула Коши.

5. Аналитичность голоморфной функции. Следствия.

6. Теорема Мореры. Следствия. Теорема об интеграле от $\frac{f(z)}{z-a}$. Условия, равносильные голоморфности.

7. Неравенство Коши. Теорема Лиувилля.

8. Основная теорема алгебры.

9. Лемма про открытое и замкнутое подмножество. Теорема единственности голоморфной функции (с производными).

10. Теорема о среднем. Следствие. Принцип максимума. Следствия.

11. Кратность нуля. Множество нулей голоморфной функции. Теорема единственности голоморфной функции.

12. Аналитическое продолжение функции. Полная аналитическая функция.

13. Продолжение с помощью степенных рядов. Существование особой точки на границе круга сходимости.

14. Теорема о существовании логарифма голоморфной функции. Логарифм. Полная аналитическая функция $\operatorname{Ln} z$ и ее свойства. Следствия.

15. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Единственность.

16. Ряд Лорана. Существование. Разложение голоморфной в кольце функции в сумму голоморфных функций.

17. Особые точки голоморфных функций. Равносильные определения устранимой особой точки.

18. Характеристика полюса. Связь между нулями и полюсами.

19. Характеристика существенной особой точки. Мероморфные функции. Свойства. Производные мероморфных функций.

20. Бесконечный предел и бесконечно удаленная точка. Особенность в бесконечно удаленной точке.

21. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Связь между расстояниями образов и прообразов. Теорема Лиувилля в $\bar{\mathbb{C}}$.

22. Теорема Сохоцкого. Формулировка теоремы Пикара.

23. Вычеты. Определения и свойства.

24. Теорема о вычетах. Сумма вычетов. Вычисление интеграла $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{x^{2n}+1}$.

25. Лемма Жордана. Вычисление интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos \lambda x}{x^2+1}\,dx$.

26. Лемма о полувычете. Интеграл в смысле главного значения. Вычисление интеграла $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}\,dx$.

27. Вычисление интеграла $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$.

28. Две теоремы о разложении мероморфной функции в сумму.

29. Разложение котангенса в ряд и синуса в бесконечное произведение.

30. Вычисление сумм рядов (общая схема). Пример с рядом из обратных квадратов.

31. Теорема о числе нулей и полюсов. Следствия.

32. Теорема Руше. Пример локализации корней с помощью теоремы Руше.

33. Диагонализация степенных рядов и произведение Адамара.

34. Асимптотика числа счастливых билетов (метод Лапласа).

35. Метод Дарбу.

36. Сохранение углов между кривыми. Теорема о голоморфном образе области.

37. Однолистные функции. Необходимое условие однолистности (в том числе и в окрестности ∞).

38. ! Конформная эквивалентность. Лемма Шварца. Теорема Римана о конформных отображениях. Доказательство единственности. Обобщение теоремы Лиувилля.

39. Дробно-линейные функции. Теорема о функциях из $H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\})$.

Глава XIV. Ряды Фурье

40. ! Пространства Лебега. Существенный супремум. Свойства. Вложение пространств Лебега.

41. Полнота пространств $L^p(E,\mu)$ при $1 \leqslant p < +\infty$.

42. Плотность ступенчатых и бесконечно дифференцируемых функций в $L^p(E,\mu)$ (второе без доказательства). Теорема о непрерывности сдвига.

43. ! Гильбертовы пространства. Скалярное произведение ряда. Сходимость ортогональных рядов.

44. Ортогональные и ортонормированные системы. Примеры. Коэффициенты Фурье.

45. ! Свойства частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса–Фишера.

46. ! Базис. Свойства эквивалентные тому, что система является базисом.

47. Функции Радемахера и Уолша. Ортогональные многочлены. Определение и примеры.

48. Наилучшие приближения. Теорема о существовании наилучшего приближения.

49. Теорема о проекции. Ортогональные проекции. Свойства.

50. Сепарабельные пространства. Существование базиса. Изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств.

51. ! Тригонометрические многочлены и ряды. Коэффициенты Фурье сходящихся тригонометрических рядов.

52. Лемма Римана–Лебега. Следствие.

53. Оценки коэффициентов Фурье для равномерно непрерывных, липшицевых и дифференцируемых функций.

54. ! Частичные суммы рядов Фурье. Ядро Дирихле. Свойства.

55. Три формулы для частичных сумм ряда Фурье. Принцип локализации.

56. ! Признак Дини. Следствия признака Дини.

57. Ряды Фурье для функций $\dfrac{\pi - x}{2}$ и $2\mathbb{1}_{[0,\pi]} - 1$. Эффект Гиббса.

58. Суммирование рядов по Чезаро.

59. ! Ядро Фейера. Свойства.

60. Свертка функций. Свойства.

61. Аппроксимативная единица. Теорема об аппроксимативной единице.

62. ! Суммирование рядов Фурье по Чезаро. Теорема Фейера. Следствия.

63. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций.

Глава XV. Поверхностные интегралы

64. Мера Лебега на аффинном подпространстве. Мера параллелепипеда. Матрица Грама.

65. ! Определение меры на поверхности. Интеграл по площади поверхности. Частные случаи и пример.

66. Внешнее произведение. Дифференциальная форма. Внешнее дифференцирование. Примеры и свойства.

67. Перенос формы. Свойства.

68. Интеграл от дифференциальной формы. Зависимость от параметризации.

69. Определение k-мерной гладкой поверхности с краем. Примеры поверхностей и вычисления интеграла.

70. Ориентация гладкой поверхности. Согласование ориентации поверхности и края. Ориентация кусочно-гладкой поверхности.

71. Формула Стокса (доказательство для поверхностей, являющихся образом куба). Частные случаи.

Примечания

Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают с доказательством лишь вопросы из второй части (вопросы 34–71, это не опечатка). Сдача коллоквиума не освобождает от необходимости знать формулировки из обеих частей курса.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: определения точной и замкнутой формы, гомотопных путей, голоморфной функции; условия Коши–Римана; интегральной формулы Коши; теоремы Лиувилля; теорем единственности; ряда Лорана; классификации и характеристики особых точек; теоремы о вычетах; определения пространств Лебега и гильбертова пространства; определения коэффициентов Фурье и ряда Фурье; теоремы Римана–Лебега; принципа локализации; признака Дини; определения свертки функций и аппроксимативной единицы; теоремы Фейера; теоремы Вейерштрасса.

Начало курса примерно в таком же изложении можно найти в книге Картана “Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных”, часть примеров взята из книги Лаврентьева и Шабата ”Методы теории функций комплексного переменного”, еще часть из книги Грина и Кнута “Математические методы анализа алгоритмов”.