Листочек 16.03.2018

1. Пусть
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n.$$
есть производящая функция для числовой последовательности $\{a_n\}$. Выразить через $f(z)$ производящие функции для последовательностей
$$b_n = a_n + a_{n+1}, \qquad c_n=\sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad d_n=\alpha^n\cdot a_n, \qquad e_n=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k+1;\\ a_n, & \text{если } n=2k.\end{cases}$$

2. Рассмотрим следующие обыкновенные производящие фукнции:
$$g(z)=1-z-6z^2, \qquad h(z)=1+3z.$$
Получить явный вид коэффициентов f_n производящей функции $f(z)$, связанной с $g(z)$ и $h(z)$ равенством
$$f(z)\cdot g(z)=h(z).$$

3. Используя определение произведения обыкновенных производящих функций, вычислить сумму
$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}4^{-k}.$$

4. Пусть δ_n есть количество делителей d числа n. Обозначим через $\delta(z)$ функцию Дирихле, отвечающую этой числовой последовательности $(\delta_1,\delta_2,\ldots)$. Выразить $\delta(z)$ через ζ-функцию Римана.

5. Пусть коэффициенты μ_n функции Мебиуса $\mu(z)$ рассчитываются по формулам
$$\mu_n=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ (-1)^s, & \begin{array}{l}\text{если в каноническом разложении } n \text{ на простые множители } n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}\\ \text{все показатели } \alpha_i=1,\end{array}\\ 0, & \text{если в этом разложении существует хотя бы одно } \alpha_i>1.\end{cases} \tag{1}$$
Доказать равенство $\zeta(z)\cdot\mu(z)=I(z)$, то есть доказать, что
$$\sum_{d\backslash n}\mu_d=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если } n>1.\end{cases}$$

6. Функцией Эйлера $\phi(z)$ называется формальный степенной ряд вида
$$\phi(z)=\frac{\phi_1}{1^z}+\frac{\phi_2}{2^z}+\ldots+\frac{\phi_n}{n^z}+\ldots,$$
коэффициенты ϕ_n которой подсчитывают количество чисел $0<d<n$, меньших n и взаимнопростых с ним. Доказать, что для любого $n\geqslant 0$ справедливо тождество
$$n=\sum_{d\backslash n}\phi_d.$$

7. Пусть x и y есть пара элементов частично упорядоченного множества P, таких, что $x\preccurlyeq y$. Мультицепью назовем мультимножество элементов $x_1,\ldots,x_k$, таких, что $x_1\preccurlyeq x_2\preccurlyeq\ldots\preccurlyeq x_k$. Доказать, что количество мультицепей вида
$$x:=x_0\preccurlyeq x_1\preccurlyeq x_2\preccurlyeq\ldots\preccurlyeq x_k=:y$$
равняется $\zeta^k(x,y)$.