

# Математическая логика и теория вычислимости

## Лекция 5. Интуиционистское исчисление высказываний

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий  
Санкт-Петербургского академического университета

13.03.2017

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

- Возьмем *классическое* гильбертовское исчисление высказываний и отбросим последнюю аксиому (закон исключенного третьего):

$$A \vee \neg A$$

- Часть тавтологий логики высказываний при этом окажутся невыводимыми.
- Получившееся исчисление высказываний носит название *интуиционистского*.
- Основные идеи интуиционизма выдвинул голландский логик и математик Брауэр (Brouwer), интуиционистскую логику предложил его ученик Гейтинг (Heyting).

- **Утверждение:** существуют иррациональные  $a$  и  $b$ , такие что  $a^b$  — рационально.
- **Доказательство.**
  - Если  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  рационально, то положим  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .
  - Если  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  иррационально, то положим  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .
  - ■ ?
- Интуционист: доказать существование чего-либо, значит построить искомый объект.
- Доказательство существования, обходящееся без построения объекта, обладающего искомым свойством, называют *неконструктивным*.

- $A$  верно (истинно), если у нас есть рассуждение, устанавливающее  $A$ .
- $A \wedge B$  — у нас есть рассуждение устанавливающее  $A$  и рассуждение устанавливающее  $B$ .
- $A \vee B$  — у нас есть либо рассуждение устанавливающее  $A$ , либо рассуждение устанавливающее  $B$ .
- $A \rightarrow B$  — у нас есть рассуждение, позволяющее установить  $B$ , как только кто-то предоставит рассуждение, устанавливающее  $A$ .
- $\neg A$  — у нас есть рассуждение, которое приводит к абсурду предположение, что  $A$  установлено. То есть  $\neg A$  эквивалентно  $A \rightarrow \perp$ .

- Схемы аксиом:

1  $A \rightarrow B \rightarrow A$

2  $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$

3  $A \wedge B \rightarrow A$

4  $A \wedge B \rightarrow B$

5  $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$

6  $A \rightarrow A \vee B$

7  $B \rightarrow A \vee B$

8  $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$

9  $\neg A \rightarrow A \rightarrow B$

10  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

- Можно полностью отказаться от унарной связки  $\neg$ , используя вместо нее нуль-арную  $\perp$ .
- При этом две последние аксиомы заменяют на

$$\perp \vdash A$$

# Выводимые и невыводимые формулы

- Лемма о дедукции верна и для интуиционистского исчисления высказываний.
- Формула  $A \rightarrow \neg\neg A$  по-прежнему выводима:

$$\begin{array}{l} 1 \quad A, \neg A \vdash A \\ 2 \quad A, \neg A \vdash \neg A \\ 3 \quad A \vdash \neg\neg A \quad \neg\text{-intro (1)(2)} \\ 4 \quad \vdash A \rightarrow \neg\neg A \quad \rightarrow \text{intro(3)} \end{array}$$

- А вот закон снятия двойного отрицания  $\neg\neg p \rightarrow p$  больше не работает:

$$\begin{array}{l} 1 \quad p, \neg\neg p \vdash p \\ 2 \quad \neg p, \neg\neg p \vdash p \quad \neg\text{-elim} \\ 3 \quad p \vee \neg p, \neg\neg p \vdash p \quad \text{case analysis (1)(2)} \\ 4 \quad p \vee \neg p \vdash \neg\neg p \rightarrow p \quad \rightarrow \text{intro(3)} \end{array}$$

(Это, конечно, не доказательство, докажем чуть позже.)



- $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
- $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$
- $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$
- Коммутативность, ассоциативность и обе дистрибутивности для  $\vee$  и  $\wedge$  сохраняются.
- $A \wedge B \rightarrow C \leftrightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
- $A \vee B \rightarrow C \leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
- $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$ , но не наоборот!
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $\neg\neg(A \vee \neg A)$

# Независимость закона исключенного третьего

- **Утверждение.** Закон исключенного третьего  $p \vee \neg p$  невыводим в интуиционистском исчислении высказываний.
- **Доказательство.** Введем следующую модель:
  - Переменным присваиваем значения из трехэлементного упорядоченного множества:  $[p] \in \{F, U, T\}$ .
  - $[A \vee B] = \max([A], [B])$
  - $[A \wedge B] = \min([A], [B])$

$[A]$	$[\neg A]$
F	T
U	F
T	F

$[A]$	$[B]$	$[A \rightarrow B]$
F	F	T
F	U	T
F	T	T
U	F	F
U	U	T
U	T	T
T	F	F
T	U	U
T	T	T

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

- Формула называется *3-тавтологией*, если она принимает значение  $\top$  на любых наборах значений переменных из  $\{F, U, \top\}$ .
- **Лемма 1.** Все аксиомы интуиционистского исчисления высказываний суть 3-тавтологии.
- **Лемма 2.** Modus ponens сохраняет свойство “быть 3-тавтологией”.
- Тогда всякая теорема ИИВ есть 3-тавтология.
- Но при  $[p] = U$  имеем  $[p \vee \neg p] = U$ , то есть  $p \vee \neg p$  невыводима в ИИВ. ■

# Невыводимость снятия двойного отрицания

- **Утверждение.** Закон снятия двойного отрицания  $\neg\neg p \rightarrow p$  невыводим в ИИВ.

- **Доказательство.**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg\neg p \rightarrow p]$
F	T	F	T
U	F	T	U
T	F	T	T

- Не 3-тавтология. ■
- **Утверждение.** Закон Пирса  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  невыводим в ИИВ.

```
GHCi> peirce'sLaw p q = ((p 'imp3' q) 'imp3' p) 'imp3' p
GHCi> check2 peirce'sLaw
[T,T,T,U,T,T,T,T]
```

# Невыводимость $\neg p \vee \neg\neg p$

- **Утверждение.** Классическая тавтология  $\neg p \vee \neg\neg p$  невыводима в ИИВ.

- **Доказательство.**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	
U	F	T	
T	F	T	

# Невыводимость $\neg p \vee \neg\neg p$

- **Утверждение.** Классическая тавтология  $\neg p \vee \neg\neg p$  невыводима в ИИВ.

- **Доказательство ?**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	T
U	F	T	T
T	F	T	T

- **Ой! Это же 3-тавтология.**

# Невыводимость $\neg p \vee \neg\neg p$

- **Утверждение.** Классическая тавтология  $\neg p \vee \neg\neg p$  невыводима в ИИВ.

- **Доказательство ?**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	T
U	F	T	T
T	F	T	T

- Ой! Это же 3-тавтология.
- То есть **полнота ИИВ относительно 3-тавтологий не имеет места.**

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?



- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?
- Курт Гёдель (Gödel [1932]) показал, что интуиционистская логика высказываний не является конечно-значной логикой.

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?
- Курт Гёдель (Gödel [1932]) показал, что интуиционистская логика высказываний не является конечно-значной логикой.
- Адекватной моделью для ИИВ служат *алгебры Гейтинга*, расширяющие понятие булевых алгебр.
- Открытые множества в топологическом пространстве образуют алгебру Гейтинга.
- Для интерпретации интуиционистской логики удобно использовать алгебру Гейтинга, элементы которой — открытые подмножества  $\mathbb{R}$ .

- Для пропозициональной переменной  $p$  оценка — некоторое открытое подмножество  $\mathbb{R}$ .
- Для связок оценка задается индуктивно:

$$\begin{aligned} \llbracket A \wedge B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cap \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket p \vee q \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cup \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket \neg A \rrbracket &= \text{Int}(\llbracket A \rrbracket^c) \\ \llbracket p \rightarrow q \rrbracket &= \text{Int}(\llbracket A \rrbracket^c \cup \llbracket B \rrbracket) \end{aligned}$$

Здесь  $\text{Int}(X)$  — внутренность множества  $X$ , а  $X^c$  — его дополнение.

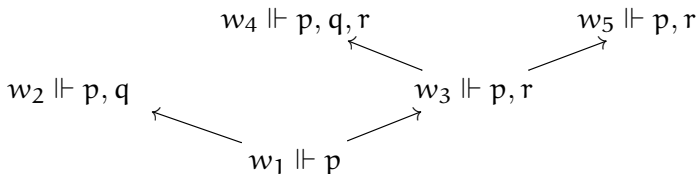
- Формула выводима в ИИВ тогда и только тогда, когда для любой оценки переменных ее значением является все множество  $\mathbb{R}$ .

- Для закона исключенного третьего  $p \vee \neg p$  оценка  $\rho(p) = (0, +\infty)$ .
- Для закона Пирса  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  оценка  $\rho(p) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\rho(q) = \emptyset$ .
- Всякая классическая тавтология задает в  $\mathbb{R}$  *плотное* множество, то есть такое, у которого внутренность дополнения пуста.

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке**
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

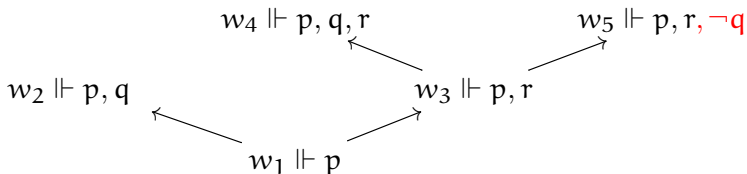
- Модель (шкала) Крипке это:
  - 1 частично упорядоченное множество миров  $\langle W, \geq \rangle$ ;
  - 2 указание истинности (некоторых) пропозициональных переменных в каждом мире, нотация  $w \Vdash p$ .
- Для заданной шкалы Крипке истинность любой формулы в данном мире определяется индуктивно:
  - если  $p$  переменная и  $w \Vdash p$ , то для любого мира  $u \geq w$  верно  $u \Vdash p$ ;
  - $w \Vdash A \wedge B$ , если  $w \Vdash A$  и  $w \Vdash B$ ;
  - $w \Vdash A \vee B$ , если  $w \Vdash A$  или  $w \Vdash B$ ;
  - $w \Vdash \neg A$ , если для любого мира  $u \geq w$  верно  $u \not\Vdash A$ ;
  - $w \Vdash A \rightarrow B$ , если для любого мира  $u \geq w$ , в котором  $u \Vdash A$ , выполняется также  $u \Vdash B$ .
- Формула, не являющаяся истинной в данном мире, называется **ложной в этом мире**.

- Пример шкалы Крипке:



- В каких мирах мы истинна формула  $\neg q$ ?  $\neg r$ ?  $q \rightarrow r$ ?

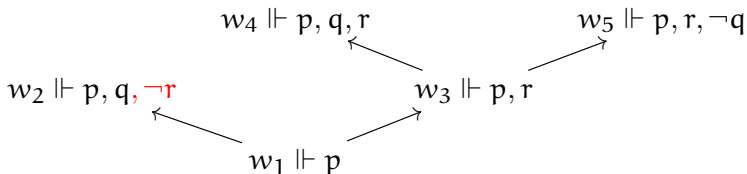
- Пример шкалы Крипке:



- В каких мирах мы истинна формула  $\neg q$ ?  $\neg r$ ?  $q \rightarrow r$ ?

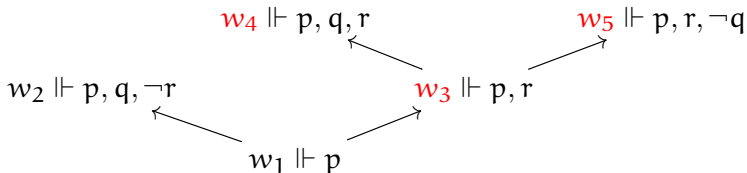


- Пример шкалы Крипке:



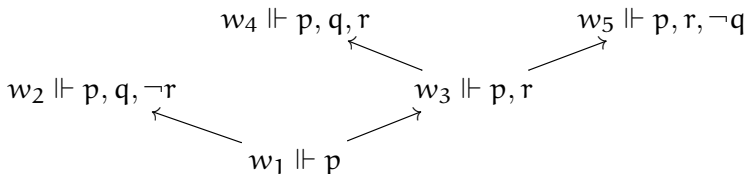
- В каких мирах мы истинна формула  $\neg q$ ?  $\neg r$ ?  $q \rightarrow r$ ?

- Пример шкалы Крипке:



- В каких мирах мы истинна формула  $\neg q$ ?  $\neg r$ ?  $q \rightarrow r$ ?

- Пример шкалы Крипке:

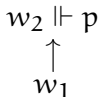


- **Лемма (о монотонности).** Если формула истинна в мире  $w$ , то она истинна во всех мирах  $u \geq w$ .
- **Доказательство.** Индукция по построению формулы. ■

- Теорема (о корректности ИИВ относительно шкал Крипке). Формула, выводимая в интуиционистском исчислении высказываний, истинна во всех мирах любой шкалы Крипке.
- Доказательство.
  - Аксиомы истинны во всех мирах. Покажем, например, для первой  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ : если для некоторого  $w$  имеет место  $w \Vdash A$ , то в силу монотонности это верно для любого  $u \geq w$ , откуда следует, что  $u \Vdash B \rightarrow A$ .
  - Modus ponens сохраняет истинность: если  $A$  и  $A \rightarrow B$  истинны во всех мирах, то  $B$  истинна во всех мирах по правилу истинности для импликации. ■

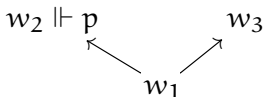
# Невыводимые в ИИВ тавтологии КИВ

- Теперь можем доказывать невыводимость формул, предъявляя подходящую контр-модель Крипке.
- $p \vee \neg p$



$p$  истинна только в  $w_2$ ,  $\neg p$  не истинна нигде, тогда  $p \vee \neg p$  истинна лишь в  $w_2$ .

- $\neg p \vee \neg\neg p$



- $w_2 \Vdash p$ , поэтому  $w_1 \not\Vdash \neg p$ ;
- $w_3 \Vdash \neg p$ , поэтому  $w_1 \not\Vdash \neg\neg p$ ;
- откуда  $w_1 \not\Vdash \neg p \vee \neg\neg p$ .

## Невыводимые в ИИВ тавтологии КИВ (2)

- Следующие тавтологии КИВ также невыводимы в ИИВ:
- $\neg\neg p \rightarrow p$
- $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \rightarrow q$
- $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vee q$
- $(p \vee q \rightarrow p) \vee (p \vee q \rightarrow q)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- Для них можно построить подходящие контр-модели Крипке.
- Более того, последнее верно для любой невыводимой в ИИВ формулы.

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке**
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

**Теорема (о полноте ИИВ относительно шкал Крипке).**

Для любой формулы, невыводимой в интуиционистском исчислении высказываний, существует шкала Крипке, в одном из миров которой эта формула является ложной.

**Доказательство.**

- По структуре схоже с доказательством полноты КИВ.
- Однако, поскольку ложность  $A$  теперь не влечет истинность  $\neg A$ , в процессе пополнения истинные и ложные формулы придется «держать отдельно», оперируя не одним (истинным) набором формул, а парой таких наборов  $(\Gamma, \Delta)$ , истинным и ложным.



# Совместность и непротиворечивость для пар наборов

- Пара наборов формул  $(\Gamma, \Delta)$  называется *совместной* если есть шкала Крипке и мир в ней, в котором все формулы из  $\Gamma$  истинны, а из  $\Delta$  ложны.
- Пара  $(\Gamma, \Delta)$  называется *противоречивой* если в ИИВ выводима формула

$$\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$$

- Пустая конъюнкция считается заведомо истинной, а пустая дизъюнкция — ложной.
- Противоречивость пары  $(\emptyset, \{A\})$  означает выводимость  $A$  в ИИВ.
- **Утверждение.** Противоречивая пара несовместна.
- **Доказательство.** Следует из корректности ИИВ относительно шкал Крипке.
- Наша задача — доказать обратное утверждение: непротиворечивая пара совместна.

- **Лемма 1.** Пусть  $(\Gamma, \Delta)$  — непротиворечивая пара, а  $A$  — произвольная формула. Тогда хотя бы одна из пар  $(\Gamma \cup \{A\}, \Delta)$  и  $(\Gamma, \Delta \cup \{A\})$  непротиворечива.
- **Доказательство.** Пусть обе противоречивы; докажем, что  $(\Gamma, \Delta)$  — противоречива. То есть из выводимости в ИИВ  $(\wedge \Gamma) \wedge A \rightarrow (\vee \Delta)$  и  $(\wedge \Gamma) \rightarrow \bar{A} \vee (\vee \Delta)$  нужно получить выводимость  $(\wedge \Gamma) \rightarrow (\vee \Delta)$ .

- 1  $\Gamma \vdash A \vee (\vee \Delta)$
- 2  $\Gamma, A \vdash (\vee \Delta)$
- 3  $\Gamma, (\vee \Delta) \vdash (\vee \Delta)$
- 4  $\Gamma \vdash (\vee \Delta)$   $\vee\text{elim}(1)(2)(3)$



- Фиксируем множество  $\Phi$  всех подформул всех формул пары  $(\Gamma, \Delta)$ .
- Пара  $(\Gamma_0, \Delta_0)$  называют *полной* (относительно  $\Phi$ ), если она **непротиворечива** и любая  $A \in \Phi$  входит либо в  $\Gamma_0$ , либо в  $\Delta_0$ .
- Свойства полных пар:
  - $\Gamma_0 \cup \Delta_0 = \Phi$ ;
  - $\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$ .
- **Лемма 2.** Непротиворечивую пару  $(\Gamma, \Delta)$  можно расширить до полной  $(\Gamma_0, \Delta_0)$  таким образом, что  $\Gamma \subset \Gamma_0$  и  $\Delta \subset \Delta_0$ .
- **Доказательство.** Применяем Лемму 1 ко всем формулам  $\Phi$ . ■

- Берем невыводимую интуиционистски формулу  $A$ . Она определяет
  - непротиворечивую пару  $(\emptyset, \{A\})$ ;
  - множество  $\Phi$  всех подформул формулы  $A$ .
- Дополняем пару  $(\emptyset, \{A\})$  до полной  $(\Gamma_0, \Delta_0)$ .
- Строим все остальные разбиения  $\Phi$ , задающие полные пары  $(\Gamma_i, \Delta_i)$ .
- Эти пары определяют миры шкалы Крипке следующим образом: если переменная  $p \in \Gamma_i$ , то в мире  $w_i \Vdash p$ ; если же  $p \in \Delta_i$ , то  $w_i \not\Vdash p$ .
- Порядок миров определяется анализом вложенности множеств истинных формул: если  $\Gamma_i \subset \Gamma_j$ , то  $w_i \leq w_j$ .

- **Лемма 3.** В построенной шкале в мире  $w_i$  истинны все формулы  $\Gamma_i$  и ложны все формулы  $\Delta_i$ .
- **Доказательство (скелет).** Индукция по структуре каждой из формул  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ .
  - **База.** Для переменных это верно по построению.
  - **Шаг.** Перебор связок (см. Верещагин, Шень ЯиИ, 2.4).
- 
- Из этой леммы следует, что любая непротиворечивая пара совместна.
- Итак, стартовали с невыводимой интуиционистски формулы  $A$ , дополнили пару  $(\emptyset, \{A\})$  до полной  $(\Gamma_0, \Delta_0)$ .
- Полная пара  $(\Gamma_0, \Delta_0)$  задает мир  $w_0$  шкалы Крипке, в котором формула  $A$  является ложной.

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 **Связь между КИВ и ИИВ**

- **Теорема Гливленко.** Формула  $A$  выводима в классическом исчислении высказываний тогда и только тогда, когда  $\neg\neg A$  выводима в интуиционистском исчислении высказываний.
- **Доказательство. (скелет)**
  - В одну сторону — тривиально.
  - В другую: показываем, что вывод  $A$  в КИВ может быть преобразован в вывод  $\neg\neg A$ : двойное отрицание аксиом дают тавтологии и МР верен в виде

$$\frac{\Gamma, \neg\neg A \quad \Gamma, \neg\neg(A \rightarrow B)}{\Gamma, \neg\neg B}$$

- Показываем, что тот же самый вывод верен в ИИВ: отброшенная аксиома  $A \vee \neg A$  превращается в верную формулу ИИВ  $\neg\neg(A \vee \neg A)$ . ■