Математическая логика и теория вычислимости
Лекция 5. Интуиционистское исчисление высказываний

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

13.03.2017

План лекции

План лекции

- Возьмем *классическое* гильбертовское исчисление высказываний и отбросим последнюю аксиому (закон исключенного третьего):

$$A \vee \neg A$$

- Часть тавтологий логики высказываний при этом окажутся невыводимыми.
- Получившееся исчисление высказываний носит название *интуиционистского*.
- Основные идеи интуиционизма выдвинул голландский логик и математик Брауэр (Brouwer), интуиционистскую логику предложил его ученик Гейтинг (Heyting).

Пример неинтуиционистского доказательства

- **Утверждение:** существуют иррациональные a и b, такие что a^b — рационально.
- **Доказательство.**
  - Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационально, то положим $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$.
  - Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ иррационально, то положим $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$.
  - $\blacksquare$?
- Интуиционист: доказать существование чего-либо, значит построить искомый объект.
- Доказательство существования, обходящееся без построения объекта, обладающего искомым свойством, называют *неконструктивным*.

Интерпретация логических связок по Брауэру

- A верно (истинно), если у нас есть рассуждение, устанавливающее A.
- $A \wedge B$ — у нас есть рассуждение устанавливающее A и рассуждение устанавливающее B.
- $A \vee B$ — у нас есть либо рассуждение устанавливающее A, либо рассуждение устанавливающее B.
- $A \to B$ — у нас есть рассуждение, позволяющее установить B, как только кто-то предоставит рассуждение, устанавливающее A.
- $\neg A$ — у нас есть рассуждение, которое приводит к абсурду предположение, что A установлено. То есть $\neg A$ эквивалентно $A \to \bot$.

Альтернативная аксиоматика

- Схемы аксиом:
  1. $A \to B \to A$
  2. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
  3. $A \land B \to A$
  4. $A \land B \to B$
  5. $A \to B \to A \land B$
  6. $A \to A \lor B$
  7. $B \to A \lor B$
  8. $(A \to C) \to (B \to C) \to A \lor B \to C$
  9. $\neg A \to A \to B$
  10. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$
- Можно полностью отказаться от унарной связки $\neg$, используя вместо нее нуль-арную $\perp$.
- При этом две последние аксиомы заменяют на

$$\perp \vdash A$$

- Лемма о дедукции верна и для интуиционистского исчисления высказываний.
- Формула $A \to \neg\neg A$ по-прежнему выводима:

$$\begin{array}{lll} 1 & A, \neg A \vdash A & \\ 2 & A, \neg A \vdash \neg A & \\ 3 & A \vdash \neg\neg A & \neg\text{—intro } (1)(2) \\ 4 & \vdash A \to \neg\neg A & \to \text{intro}(3) \end{array}$$

- А вот *закон снятия двойного отрицания* $\neg\neg p \to p$ больше не работает:

$$\begin{array}{lll} 1 & p, \neg\neg p \vdash p & \\ 2 & \neg p, \neg\neg p \vdash p & \neg\text{elim} \\ 3 & p \vee \neg p, \neg\neg p \vdash p & \text{case analysis } (1)(2) \\ 4 & p \vee \neg p \vdash \neg\neg p \to p & \to \text{intro}(3) \end{array}$$

(Это,конечно, не доказательство, докажем чуть позже.)

Примеры выводимых в ИИВ формул

- $(A \to B) \to \neg B \to \neg A$
- $\neg\neg\neg A \to \neg A$
- $\neg A \to \neg\neg\neg A$
- Коммутативность, ассоциативность и обе дистрибутивности для $\vee$ и $\wedge$ сохраняются.
- $A \wedge B \to C \leftrightarrow A \to B \to C$
- $A \vee B \to C \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$
- $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $\neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$, но не наоборот!
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $\neg\neg(A \vee \neg A)$

- **Утверждение.** Закон исключенного третьего $p \vee \neg p$ невыводим в интуиционистском исчислении высказываний.
- **Доказательство.** Введем следующую модель:
  - Переменным присваиваиваем значения из трехэлементного упорядоченного множества: $[p] \in \{F, U, T\}$.
  - $[A \vee B] = \max([A], [B])$
  - $[A \wedge B] = \min([A], [B])$

$[A]$	$[\neg A]$
F	T
U	F
T	F

-

$[A]$	$[B]$	$[A \to B]$
F	F	T
F	U	T
F	T	T
U	F	F
U	U	T
U	T	T
T	F	F
T	U	U
T	T	T

$\neg(p \wedge \neg p)$

Корректность ИИВ относительно 3-тавтологичности

- Формула называется *3-тавтологией*, если она принимает значение T на любых наборах значений переменных из $\{\mathrm{F}, \mathrm{U}, \mathrm{T}\}$.
- **Лемма 1.** Все аксиомы интуиционистского исчисления высказываний суть 3-тавтологии.
- **Лемма 2.** Modus ponens сохраняет свойство "быть 3-тавтологией".
- Тогда **всякая теорема ИИВ есть 3-тавтология.**
- Но при $[\mathrm{p}] = \mathrm{U}$ имеем $[\mathrm{p} \vee \neg \mathrm{p}] = \mathrm{U}$, то есть $\mathrm{p} \vee \neg \mathrm{p}$ невыводима в ИИВ. ■

Невыводимость снятия двойного отрицания

- **Утверждение.** Закон снятия двойного отрицания $\neg\neg p \to p$ невыводим в ИИВ.
- **Доказательство.**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg\neg p \to p]$
F	T	F	T
U	F	T	U
T	F	T	T

- Не 3-тавтология. ■
- **Утверждение.** Закон Пирса $((p \to q) \to p) \to p$ невыводим в ИИВ.

```
GHCi> peirce'sLaw p q = ((p `imp3` q) `imp3` p) `imp3` p
GHCi> check2 peirce'sLaw
[T,T,T,U,T,T,T,T,T]
```

Невыводимость $\neg p \vee \neg\neg p$

- **Утверждение.** Классическая тавтология $\neg p \vee \neg\neg p$ невыводима в ИИВ.
- **Доказательство.**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	
U	F	T	
T	F	T	

Невыводимость $\neg p \vee \neg\neg p$

- **Утверждение.** Классическая тавтология $\neg p \vee \neg\neg p$ невыводима в ИИВ.
- **Доказательство ?**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	T
U	F	T	T
T	F	T	T

- Ой! Это же 3-тавтология.

Невыводимость $\neg p \lor \neg\neg p$

- **Утверждение.** Классическая тавтология $\neg p \lor \neg\neg p$ невыводима в ИИВ.
- **Доказательство ?**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \lor \neg\neg p]$
F	T	F	T
U	F	T	T
T	F	T	T

- Ой! Это же 3-тавтология.
- То есть полнота ИИВ относительно 3-тавтологий не имеет места.

Полнота ИИВ: выбор модели

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?

Полнота ИИВ: выбор модели

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?
- Курт Гёдель (Gödel [1932]) показал, что интиуционистская логика высказываний не является конечно-значной логикой.

Полнота ИИВ: выбор модели

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?
- Курт Гёдель (Gödel [1932]) показал, что интуиционистская логика высказываний не является конечно-значной логикой.
- Адекватной моделью для ИИВ служат *алгебры Гейтинга*, расширяющие понятие булевых алгебр.
- Открытые множества в топологическом пространстве образуют алгебру Гейтинга.
- Для интерпретации интуиционистской логики удобно использовать алгебру Гейтинга, элементы которой — открытые подмножества $\mathbb{R}$.

Интерпретация ИИВ через открытые подмножества $\mathbb{R}$

- Для пропозициональной переменной p оценка — некоторое открытое подмножество $\mathbb{R}$.
- Для связок оценка задается индуктивно:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![A \wedge B]\!] & = & [\![A]\!] \cap [\![B]\!] \\
[\![p \vee q]\!] & = & [\![A]\!] \cup [\![B]\!] \\
[\![\neg A]\!] & = & \mathtt{Int}\left([\![A]\!]^{C}\right) \\
[\![p \rightarrow q]\!] & = & \mathtt{Int}\left([\![A]\!]^{C} \cup [\![B]\!]\right)
\end{array}
$$

  Здесь $\mathtt{Int}(X)$ — внутренность множества X, а X^C — его дополнение.
- Формула выводима в ИИВ тогда и только тогда, когда для любой оценки переменных ее значением является все множество $\mathbb{R}$.

Контрпримеры для невыводимых в ИИВ формул

- Для закона исключенного третьего $p \vee \neg p$ оценка $\rho(p) = (0, +\infty)$.
- Для закона Пирса $((p \to q) \to p) \to p$ оценка $\rho(p) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\rho(q) = \varnothing$.
- Всякая классическая тавтология задает в $\mathbb{R}$ *плотное* множество, то есть такое, у которого внутренность дополнения пуста.

План лекции

Модели Крипке

- *Модель (шкала) Крипке* это:
  1. частично упорядоченное множество *миров* $\langle W, \geqslant \rangle$;
  2. указание *истинности* (некоторых) пропозициональных переменных в каждом мире, нотация $w \Vdash p$.
- Для заданной шкалы Крипке истинность любой формулы в данном мире определяется индуктивно:
  - если p переменная и $w \Vdash p$, то для любого мира $u \geqslant w$ верно $u \Vdash p$;
  - $w \Vdash A \wedge B$, если $w \Vdash A$ и $w \Vdash B$;
  - $w \Vdash A \vee B$, если $w \Vdash A$ или $w \Vdash B$;
  - $w \Vdash \neg A$, если для любого мира $u \geqslant w$ верно $u \nVdash A$;
  - $w \Vdash A \to B$, если для любого мира $u \geqslant w$, в котором $u \Vdash A$, выполняется также $u \Vdash B$.
- Формула, не являющаяся истинной в данном мире, называется *ложной* в этом мире.

Пример модели Крипке

- Пример шкалы Крипке:

$$
\begin{tikzcd}
 & w_4 \Vdash p, q, r & & w_5 \Vdash p, r \\
w_2 \Vdash p, q & & w_3 \Vdash p, r \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & w_1 \Vdash p \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \to r$?

Пример модели Крипке

- Пример шкалы Крипке:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & w_4 \Vdash p, q, r & & w_5 \Vdash p, r, \neg q \\
w_2 \Vdash p, q & & w_3 \Vdash p, r \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & w_1 \Vdash p \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \to r$?

Пример модели Крипке

- Пример шкалы Крипке:

$$
\begin{tikzcd}
 & w_4 \Vdash p, q, r & & w_5 \Vdash p, r, \neg q \\
w_2 \Vdash p, q, \neg r & & w_3 \Vdash p, r \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & w_1 \Vdash p \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \to r$?

Пример модели Крипке

- Пример шкалы Крипке:

$$\begin{tikzcd}
 & w_4 \Vdash p, q, r & & w_5 \Vdash p, r, \neg q \\
w_2 \Vdash p, q, \neg r & & w_3 \Vdash p, r \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & w_1 \Vdash p \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \to r$?

- Пример шкалы Крипке:

$$
\begin{tikzcd}
 & & w_4 \Vdash p, q, r & & w_5 \Vdash p, r, \neg q \\
 & w_2 \Vdash p, q, \neg r & & w_3 \Vdash p, r \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & & w_1 \Vdash p \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

- **Лемма (о монотонности).** Если формула истинна в мире w, то она истинна во всех мирах $u \geqslant w$.
- **Доказательство.** Индукция по построению формулы. ∎

Корректность ИИВ

- **Теорема (о корректности ИИВ относительно шкал Крипке).** Формула, выводимая в интуиционистском исчислении высказываний, истинна во всех мирах любой шкалы Крипке.
- **Доказательство.**
  - Аксиомы истинны во всех мирах. Покажем, например, для первой $A \to (B \to A)$: если для некоторого w имеет место $w \Vdash A$, то в силу монотонности это верно для любого $u \geqslant w$, откуда следует, что $u \Vdash B \to A$.
  - Modus ponens сохраняет истинность: если A и $A \to B$ истинны во всех мирах, то B истинна во всех мирах по правилу истинности для импликации. ■

Невыводимые в ИИВ тавтологии КИВ

- Теперь можем доказывать невыводимость формул, предъявляя подходящую контр-модель Крипке.
- $p \vee \neg p$

$$\begin{tikzcd} w_2 \Vdash p \\ w_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

  p истинна только в w_2, $\neg p$ не истинна нигде, тогда $p \vee \neg p$ истинна лишь в w_2.
- $\neg p \vee \neg\neg p$

$$\begin{tikzcd} w_2 \Vdash p & & w_3 \\ & w_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

  - $w_2 \Vdash p$, поэтому $w_1 \nVdash \neg p$;
  - $w_3 \Vdash \neg p$, поэтому $w_1 \nVdash \neg\neg p$;
  - откуда $w_1 \nVdash \neg p \vee \neg\neg p$.

Невыводимые в ИИВ тавтологии КИВ (2)

- Следующие тавтологии КИВ также невыводимы в ИИВ:
- $\neg\neg p \to p$
- $(\neg q \to \neg p) \to p \to q$
- $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$
- $(p \to q) \to \neg p \vee q$
- $(p \vee q \to p) \vee (p \vee q \to q)$
- $((p \to q) \to p) \to p$
- Для них можно построить подходящие контр-модели Крипке.
- Более того, последнее верно для любой невыводимой в ИИВ формулы.

План лекции

Полнота ИИВ

Теорема (о полноте ИИВ относительно шкал Крипке). Для любой формулы, невыводимой в интуиционистском исчислении высказываний, существует шкала Крипке, в одном из миров которой эта формула является ложной.

Доказательство.

- По структуре схоже с доказательством полноты КИВ.
- Однако, поскольку ложность A теперь не влечет истинность $\neg A$, в процессе пополнения истинные и ложные формулы придется «держать отдельно», оперируя не одним (истинным) набором формул, а парой таких наборов (Γ, Δ), истинным и ложным.

Совместность и непротиворечивость для пар наборов

- Пара наборов формул (Γ, Δ) называется *совместной* если есть шкала Крипке и мир в ней, в котором все формулы из Γ истинны, а из Δ ложны.
- Пара (Γ, Δ) называется *противоречивой* если в ИИВ выводима формула
$$\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$$
- Пустая конъюнкция считается заведомо истинной, а пустая дизъюнкция — ложной.
- Противоречивость пары $(\varnothing, \{A\})$ означает выводимость A в ИИВ.
- **Утверждение.** Противоречивая пара несовместна.
- **Доказательство.** Следует из корректности ИИВ относительно шкал Криптке.
- Наша задача — доказать обратное утверждение: непротиворечивая пара совместна.

Шаг пополнения

- **Лемма 1.** Пусть (Γ, Δ) — непротиворечивая пара, а A — произвольная формула. Тогда хотя бы одна из пар $(\Gamma \cup \{A\}, \Delta)$ и $(\Gamma, \Delta \cup \{A\})$ непротиворечива.
- **Доказательство.** Пусть обе противоречивы; докажем, что (Γ, Δ) — противоречива. То есть из выводимости в ИИВ $(\bigwedge\Gamma) \wedge A \to (\bigvee\Delta)$ и $(\bigwedge\Gamma) \to A \vee (\bigvee\Delta)$ нужно получить выводимость $(\bigwedge\Gamma) \to (\bigvee\Delta)$.

1	$\Gamma \vdash A \vee (\bigvee\Delta)$	
2	$\Gamma, A \vdash (\bigvee\Delta)$	
3	$\Gamma, (\bigvee\Delta) \vdash (\bigvee\Delta)$	
4	$\Gamma \vdash (\bigvee\Delta)$	$\vee$elim(1)(2)(3)

∎

Пополнение

- Фиксируем множество Φ всех подформул всех формул пары (Γ, Δ).
- Пара (Γ_0, Δ_0) называют *полной* (относительно Φ), если она непротиворечива и любая $A \in \Phi$ входит либо в Γ_0, либо в Δ_0.
- Свойства полных пар:
  - $\Gamma_0 \cup \Delta_0 = \Phi$;
  - $\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \varnothing$.
- **Лемма 2.** Непротиворечивую пару (Γ, Δ) можно расширить до полной (Γ_0, Δ_0) таким образом, что $\Gamma \subset \Gamma_0$ и $\Delta \subset \Delta_0$.
- **Доказательство.** Применяем Лемму 1 ко всем формулам Φ. $\blacksquare$

Конструирование шкалы Крипке

- Берем невыводимую интуиционистски формулу A. Она определяет
  - непротиворечивую пару $(\varnothing, \{A\})$;
  - множество Φ всех подформул формулы A.
- Дополняем пару $(\varnothing, \{A\})$ до полной (Γ_0, Δ_0).
- Строим все остальные разбиения Φ, задающие полные пары (Γ_i, Δ_i).
- Эти пары определяют миры шкалы Крипке следующим образом: если переменная $p \in \Gamma_i$, то в мире $w_i \Vdash p$; если же $p \in \Delta_i$, то $w_i \nVdash p$.
- Порядок миров определяется анализом вложенности множеств истинных формул: если $\Gamma_i \subset \Gamma_j$, то $w_i \leqslant w_j$.

Полнота ИИВ

- **Лемма 3.** В построенной шкале в мире w_i истинны все формулы Γ_i и ложны все формулы Δ_i.
- **Доказательство (скелет).** Индукция по структуре каждой из формул Γ_i и Δ_i.
  - **База.** Для перемнных это верно по построению.
  - **Шаг.** Перебор связок (см. Верещагин, Шень ЯиИ, 2.4).

  ■
- Из этой леммы следует, что любая непротиворечивая пара совместна.
- Итак, стартовали с невыводимой интуиционистски формулы A, дополнили пару $(\varnothing, \{A\})$ до полной (Γ_0, Δ_0).
- Полная пара (Γ_0, Δ_0) задает мир w_0 шкалы Крипке, в котором формула A является ложной.

План лекции

- **Теорема Гливенко.** Формула A выводима в классическом исчислении высказываний тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$ выводима в интуиционистском исчислении высказываний.
- **Доказательство. (скелет)**
  - В одну сторону — тривиально.
  - В другую: показываем, что вывод A в КИВ может быть преобразован в вывод $\neg\neg A$: двойное отрицание аксиом дают тавтологии и MP верен в виде

$$\frac{\Gamma, \neg\neg A \qquad \Gamma, \neg\neg(A \to B)}{\Gamma, \neg\neg B}$$

  - Показываем, что тот же самый вывод верен в ИИВ: отброшенная аксиома $A \vee \neg A$ превращается в верную формулу ИИВ $\neg\neg(A \vee \neg A)$. ■