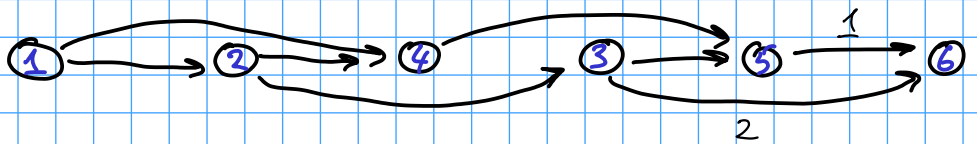
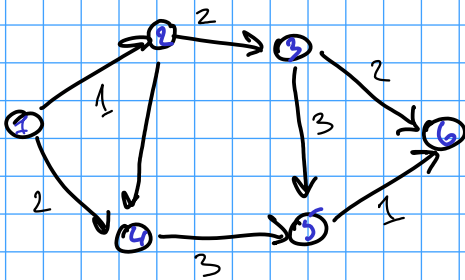


# Динамическое программирование.

1. Крайние пути в орграфе без циклов



$L(n)$  - крайнее расст. от 1 до  $n$

$$L(6) = \min \{ L(5) + 1, L(3) + 2 \}$$

$$L(v) = \min_{(u,v) \in E} \{ L(u) + W_{uv} \}$$

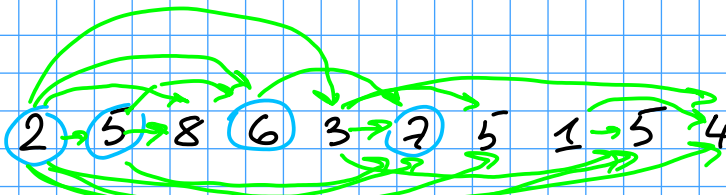
$$L(1) = 0$$

$$L(\dots) = \infty$$

Мн.-во параметров:

$$\{ L(n) \mid n = 1..6 \}$$

2. Задача о самой длинной возрастающей подпоследовательности



$\{a_i\}_{i=1}^n$ , найти  $\{k_j\}$  :  $k_l < k_{l+1}$

$$\{a_{k_i}\} \uparrow \uparrow$$

Мн.-во параметров:

$S(n)$  - макс. ПП возрастающей подпоследовательности в последовательности  $n$

$$\max_i S(i) = ?$$

$$S(k) = \max_{i \rightarrow k} \{ S(i) \} + 1$$

$i \rightarrow k : a[i] < a[k], i < k$

LIS( $a[n]$ ):

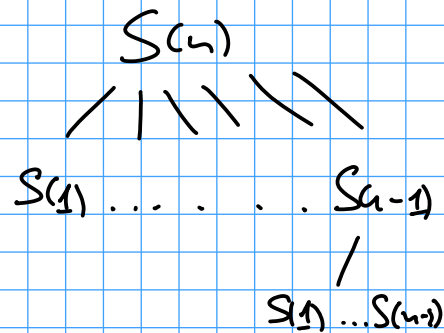
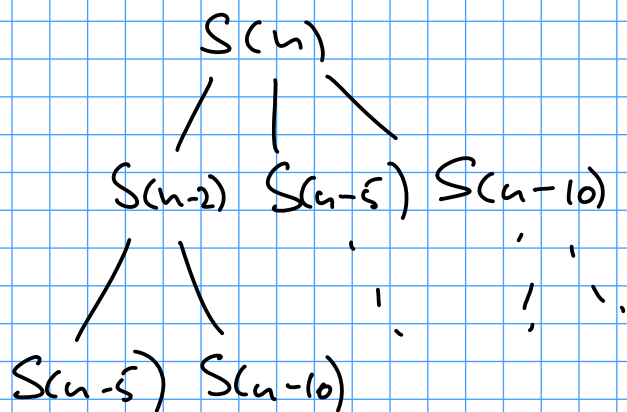
for  $i = 1$  to  $n$ :

$$S(i) = \max_{j \rightarrow i} \{S(j)\} + 1$$

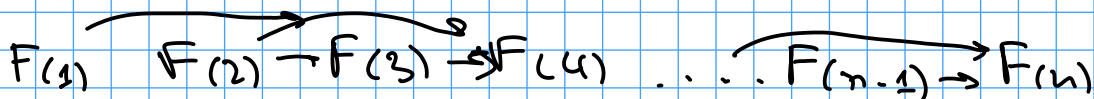
$O(n^2)$

NB: перепроверить орг. работы эконо. время.

Quick Fix: Memoisation



$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$



Вопрос: как найти carry номер-то?

Ответ: нисходящая рекурсия...

Задача о редакционном расстоянии  
(Расстояние Левинштейна).

S U N N Y  
S N O W Y

D O X B B  
D P O X B

Задача о выравнивании:

3

S U N N - Y  
S - N O W Y  
S U N N - - Y  
S - N - O W Y

D - O X B B  
D P O X - B

2

≡ Редакц. расстояние - min выравнивание

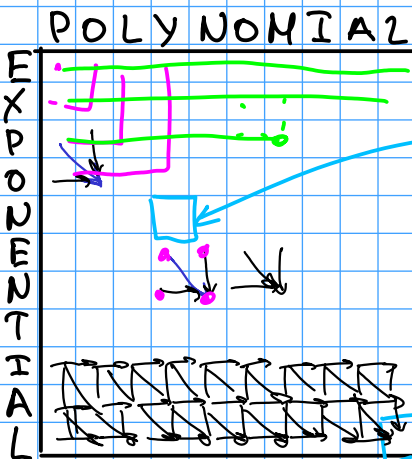
S<sub>1</sub> POLYNOMIAL

S<sub>2</sub> EXPONENTIAL  $E(4,5) = \min(E(3,4)+1, E(3,5)+1, E(4,4)+1)$

Мн-во подзадач:  $\{E(i,j)\}$

$$E(i,j) = \text{dist}(S_1[1,i], S_2[1,j])$$

$$E(4,5) = \text{dist}(\text{"POLY"}, \text{"EXPON"})$$



$E(4,5)$

ответ

$$E(i,j) = \min \left\{ \begin{aligned} &E(i-1, j-1) + [S_1[i] \neq S_2[j]] \\ &E(i-1, j) + 1 \\ &E(i, j-1) + 1 \end{aligned} \right\}$$

$[DIST(S_1[n], S_2[m])]$

for  $i=0$  to  $n$  :

$$E(i, 0) = i$$

for  $j=1$  to  $m$

$$E(0, j) = j$$

for  $i=1$  to  $n$  :

for  $j=1$  to  $m$  :

$$E(i, j) = \min \{ E(i-1, j-1) + [S_1[i] \neq S_2[j]], E(i-1, j) + 1, E(i, j-1) + 1 \}$$

return  $E(n, m)$

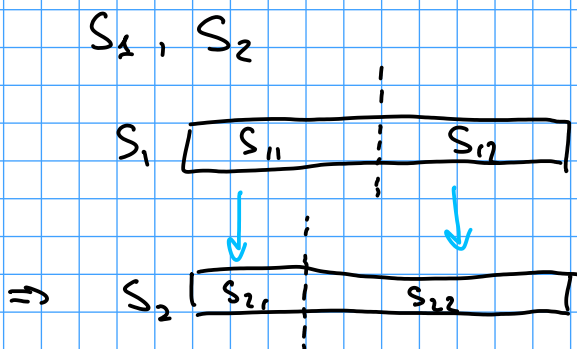
		0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5	
1	1	0	1	2	3	4	
2	2	1	1	2	3	4	
3	3	2	1	2	3	4	
4	4	3	2	1	2	3	
5	5	4	3	2	2	3	

↓ Вставка  
→ Удаление  
↘ Замена  
↘ —

Типы типа изменений:

1. Вставка —  
a
2. Удаление a  
—
3. Замена a  
a

## Алгоритм Хиршберга (Hirschberg)



Так, что:

$$E(S_{11}, S_{21}) + E(S_{12}, S_{22}) \rightarrow \min$$

S<sub>1</sub> sunny

S<sub>2</sub> snowy

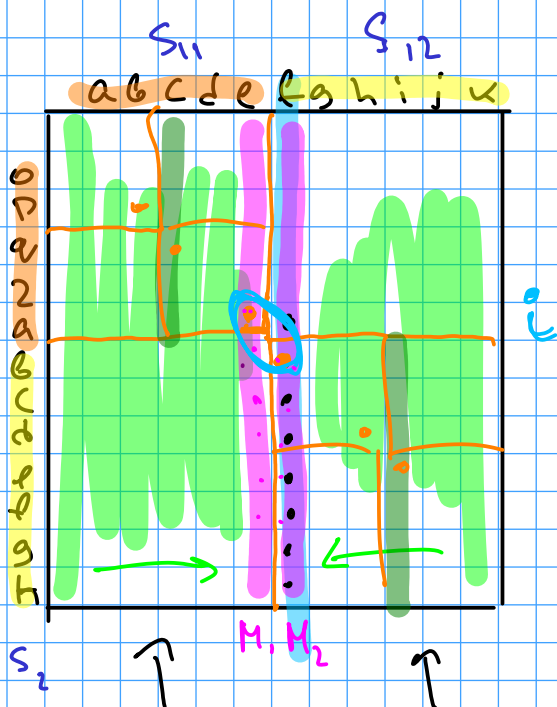
$\frac{sunny}{snowy}$   
 $\frac{sunn}{snowy}$   
 $\frac{sun}{snowy}$

$$2 + 2 = 4$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3 + 1 = 4$$



$S_1$

Hirschberg ( $S_1, S_2$ )  
 $S_1 \rightarrow S_{11}, S_{12}$  ( $|S_{11}| = |S_{12}|$ )  
 $M_1 = E(S_{11}, S_2)$   
 $M_2 = E(\text{rev}(S_{12}), \text{rev}(S_2))$   
 $i : M_1[i] + M_2[i+1] \rightarrow \min$   
 Hirschberg ( $S_{11}, S_2[1, i]$ )  
 Hirschberg ( $S_{12}, S_2[i+1, n]$ )

$E(S_{11}, S_2)$        $E(\text{rev}(S_{12}), \text{rev}(S_2))$   
 $E(\text{sun}, \text{SNOWY})$      $E(\text{YN}, \text{YWONS})$

$$N^2 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{4}N^2 + \dots = 2N^2$$

Space  $2 \cdot |S_1| \cdot |S_2|$   
 Names  $O(|S_1| + |S_2|)$

NB: Meet-in-the-middle